筑波大学集中講義 (数学特論 B)

群作用の幾何学への応用

井川 治 (京都工芸繊維大学)

2019 年 12 月 3 日–6 日

概 要

この講義では集合と群の定義を既知とし，群が集合に作用している場合を扱う．対象となる集合はベクトル空間やそこから派生してくる空間であり，対象となる群は行列で表示される群である．群作用の軌道全体のなす空間が明示的に表示できる具体例を扱う．行列の階数や簡約化，Cauchy-Schwarz の不等式もこの視点から見直す．目標は Wirtinger 不等式を紹介し，証明を与えることである．予備知識は集合，群，ベクトル空間，内積，Hermite 内積などである．

学部 4 年生から大学院への数学の橋渡しになる講義を目指す.[1]

記号表

$\mathbb{R}$	実数体
i	虚数単位 $i=\sqrt{-1}$
$\mathbb{C}$	複素数体 $\{x+iy \mid x,y\in\mathbb{R}\}$
$a := b$	a を b とおく
$/\!/$	平行
$\lvert A\rvert, \det(A)$	正方行列 A の行列式
$\mathrm{sgn}(\sigma)$	置換 σ の符号 $(=\pm1)$
$X-Y$	集合 X,Y の差集合 $\{x\in X \mid x\notin Y\}$
$\oplus$	ベクトル空間の直和
$\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{u_1,\cdots,u_n\}$	$\mathbb{R}u_1+\cdots+\mathbb{R}u_n$
$\langle u_1,u_2\rangle_{\mathbb{R}}$	$\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{u_1,u_2\}$

[1]集中講義の機会を与えてくださった田崎博之先生と，講義を聴講してくださった学生さんに深く感謝しています.

目次

1　導入

X を集合とする．X から X への全単射全体のなす群を $S(X)$ と表し，X 上の**対称群**という．$\sigma \in S(X)$ と $x \in X$ に対し，$\sigma(x) \in X$ が定まる．これを $S(X)$ の X への作用と言う．この講義では，ベクトル空間や内積をもつベクトル空間，あるいはこれらから派生してくる空間を X として考えたい．すると，X は和やスカラー倍，内積といった様々な構造をもつので，これらを保つ $S(X)$ の部分群の作用を考えることは自然なことに

なる．たとえばベクトル空間の和とスカラー倍を保つ作用は線形変換に他ならない．$\tilde{G}$ を $S(X)$ の部分群とすると，$\tilde{G}$ の X への作用が，$g \in \tilde{G}$ と $x \in X$ に対し，$g(x) \in X$ で定まる．ほとんど同じことであるが，群 G と準同型写像 $\rho : G \to S(X)$ があれば，G の X への**作用**が $g \in G$ と $x \in X$ に対し，$\rho(g)x \in X$ で定まる．記号 ρ は前後関係から明らかな場合には省くこともある．$x \in X$ に対し，

$$Gx = \{gx \mid g \in G\} \subset X$$

を x を通る G-**軌道**または単に x を通る**軌道**と言う．x を軌道 Gx の**始点**という．$x, y \in X$ に対し，$Gx = Gy$ となる必要十分条件は，$g \in G$ が存在して，$gx = y$ となることである．G-軌道全体のなす集合を**軌道空間**といい，$G\backslash X$ で表す：

$$G\backslash X = \{Gx \mid x \in X\}$$

群 G の集合 X への作用が**推移的**であるとは，任意の $x, y \in X$ に対し，ある $g \in G$ が存在して，$y = gx$ となるときをいう．このとき，X を G-**等質空間**または単に**等質空間**という．G-等質空間の軌道空間は 1 点からなる．

問題 1.1. 群 G が集合 X に作用しているとする．

(1) $g \in G, x \in X$ に対し，$\rho(g^{-1})x = \rho(g)^{-1}x$ となることを示せ．ただし，$\rho(g)^{-1}$ は $\rho(g)$ の逆変換を表す．

(2) $\rho^{-1}(1) = \{g \in G \mid \rho(g) = 1\}$ は G の正規部分群であることを示せ．

(3) 次を示せ．

$$\begin{aligned} G \text{ の } X \text{ への作用は推移的} &\Leftrightarrow \text{ある } x_0 \in X \text{ が存在して，} X = Gx_0 \\ &\Leftrightarrow \text{任意の } x \in X \text{ に対し，} X = Gx \end{aligned}$$

$K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ とする．K の元を成分とする n 次正則行列全体のなす群を $GL(n, K)$ と表し，これを**一般線形群**という：

$$\begin{aligned} GL(n, K) &= \{K \text{ の元を成分とする } n \text{ 次正則行列全体}\} \\ &= \{K \text{ の元を成分とする } n \text{ 次行列 } X \text{ で } |X| \neq 0 \text{ となるもの全体}\} \end{aligned}$$

$GL(n, \mathbb{R})$ の部分群 $O(n)$ を

$$O(n) = \{g \in GL(n, \mathbb{R}) \mid {}^t gg = E_n\}$$

で定義し．これを n 次直交群という．$O(n)$ の元を n 次直交行列という．$\mathbb{R}^n$ の標準内積を $\langle\ ,\ \rangle$ と表し，$\langle\ ,\ \rangle$ から定まるノルムを $\|\cdot\|$ で表すと，

$$\begin{aligned}O(n) &= \{g \in GL(n,\mathbb{R}) \mid g^{-1} = {}^t g\}\\ &= \{g \in GL(n,\mathbb{R}) \mid \langle gx, gy\rangle = \langle x, y\rangle \quad (x, y \in \mathbb{R})\}\\ &= \{g \in GL(n,\mathbb{R}) \mid \|gx\| = \|x\| \quad (x \in \mathbb{R}^n)\}\end{aligned}$$

が成り立つ．$g \in O(n)$ の行列式は $|g| = \pm 1$ を満たす．これを踏まえて $O(n)$ の部分群 $SO(n)$ を

$$SO(n) = \{g \in O(n) \mid |g| = 1\}$$

と定義し，n 次特殊直交群という．$SO(n)$ の元を n 次特殊直交行列という．$GL(n, K)$ は K^n に正則一次変換として作用するので，その部分群は K^n に自然に作用する．

$n-1$ 次元球面 $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ は $n \geq 2$ のとき，$SO(n)$-等質空間である (定理 4.1)．この性質を利用して次の例題の行列式を求めてみよう．

例題 1.1. $x_1, x_2, \cdots, x_n, k$ を実数とする．次の行列式を求めよ．

$$\begin{vmatrix} x_1^2 + k & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2^2 + k & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & x_n^2 + k \end{vmatrix}$$

解答 1. $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ とおくと，与えられた行列式は $|x^t x + kE_n|$．
$g \in SO(n)$ に対して，x を gx で置き換えると，

$$|gx^t(gx) + kE_n| = |gx^t x^t g + kE_n| = |g(x^t x + kE_n)^t g| = |x^t x + kE_n|$$

よって与えられた行列式は変換 $x \mapsto gx$ で変わらない．$SO(n)$ は S^{n-1} に推移的に作用するから，ある $g \in SO(n)$ が存在して，$gx = |x|e_n$．このとき，

$$|x^t x + kE_n| = |gx^t(gx) + kE_n| = \begin{vmatrix} k & & & \\ & \ddots & & \\ & & k & \\ & & & k + |x|^2 \end{vmatrix} = k^{n-1}(k + |x|^2)$$

$\square$

解答 2. $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ とおく．$x = 0$ のとき，与式は対角行列の行列式になるから，k^n．以下，$x \neq 0$ のときを考察する．簡単な計算で

$$(x^t x + kE_n)y = \langle x, y \rangle x + ky$$

が成り立つことに注意する．$\mathbb{R}^n$ の $(n-1)$ 次元部分空間 V を $V = x^\perp$ と定めると，$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}x \oplus V$(直交直和)．上の計算より，

$$(x^t x + kE_n)x = (\|x\|^2 + k)x.$$

$y \in V$ に対して，

$$(x^t x + kE_n)y = ky$$

よって，

$$|x^t x + kE_n| = k^{n-1}(k + |x|^2)$$

これは $x = 0$ のときでも成り立つ． $\square$

上の例題を解答 1 の方法で解くときに次の性質を利用した．

(1) $SO(n)$ は S^{n-1} に推移的に働く．

(2) 与えられた行列式は $x \mapsto gx$ $(g \in SO(n))$ で不変である．

(3) (1), (2) を利用して x を標準的な位置 $|x|e_n$ にもってくると，行列式の計算が簡単になる．

性質 (1) の代わりに次の性質 (1)' を用いてもよい．

(1)' $SO(n)$ の $\mathbb{R}^n$ への標準的な作用を考える．このとき，任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して，$g \in SO(n)$ が存在して，$gx \in \mathbb{R}_{\geq 0}e_n$．

(1)' より軌道空間について

$$SO(n)\backslash\mathbb{R}^n = \{SO(n)y \mid y \in \mathbb{R}^n\} = \{SO(n)xe_n \mid x \geq 0\}$$

よって写像 $\mathbb{R}_{\geq 0} \to SO(n)\backslash\mathbb{R}^n; x \mapsto SO(n)xe_n$ は全射である．$SO(n)$ の作用は $\mathbb{R}^n$ の内積を保つから，

$$SO(n)xe_n = SO(n)ye_n \Rightarrow |x| = |y| \Rightarrow x = y$$

よって，写像 $\mathbb{R}_{\geq 0} \to SO(n)\backslash\mathbb{R}^n; x \mapsto SO(n)xe_n$ は全単射であり，この写像により軌道空間 $SO(n)\backslash\mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}_{\geq 0}$ と同一視される．

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \cong SO(n)\backslash\mathbb{R}^n; x \mapsto SO(n)xe_n$$

例題 1.1 の結論は $x_1, \cdots, x_n, k$ が複素数でも成り立つ：

例題 1.2. 複素数 $z_1, \cdots, z_n, \kappa$ に対して，

$$\begin{vmatrix} z_1^2+\kappa & z_1z_2 & \cdots & z_1z_n \\ z_2z_1 & z_2^2+\kappa & \cdots & z_2z_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_nz_1 & z_nz_2 & \cdots & z_n^2+\kappa \end{vmatrix} = \kappa^{n-1}(\kappa + \sum_{j=1}^n z_j^2)$$

となることを示せ．

証明 *1.* 上の式の左辺，右辺をそれぞれ $f(z_1, \cdots, \kappa), g(z_1, \cdots, z_n, \kappa)$ とおくと，f, g はそれぞれ $z_1, \cdots, z_n, \kappa$ の多項式関数，特に，整関数である．実数 $x_1, \cdots, x_n, k$ に対しては既に示したことから，$f(x_1, \cdots, x_n, k) = g(x_1, \cdots, x_n, k)$ が成り立つ．変数 z_1 に一致の定理を適用して，

$$f(z_1, x_2, \cdots, x_n, \kappa) = g(z_1, x_2, \cdots, x_n, \kappa).$$

以下，繰り返し一致の定理を用いて，$f(z_1, \cdots, \kappa) = g(z_1, \cdots, z_n, \kappa)$ が得られる． □

証明 *2.* 証明 1 で複素関数論を用いた部分は，次のように多項式の性質を用いてもよい：$a_0, a_1, \cdots, a_n, b_0, b_1, \cdots, b_n$ を複素数とする．このとき，

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^n a_j x^j = \sum_{j=0}^n b_j x^j \text{が任意の実数 } x \text{ について成り立つ} \\ &\Leftrightarrow a_0 = b_0, a_1 = b_1, \cdots, a_n = b_n \\ &\Leftrightarrow \sum_{j=0}^n a_j z^j = \sum_{j=0}^n b_j z^j \text{が任意の複素数 } z \text{ について成り立つ} \end{aligned}$$

□

次に群作用を利用して Cauchy-Schwarz の不等式を証明してみよう．

定理 1.1. [Cauchy-Schwarz の不等式] $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して，

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$$
$$``='' \Leftrightarrow x /\!/ \ y$$

証明. $g \in SO(n)$ に対して，$\langle gx, gy\rangle = \langle x, y\rangle, \|gx\| = \|x\|, \|gy\| = \|y\|$ となる．さらに，$x /\!/ \ y \Leftrightarrow gx /\!/ \ gy$ が成り立つ．$x = 0$ のとき，主張が成り立つことは明らかだから，以下，$x \neq 0$ と仮定する．性質 (1)' より，$g_1 \in SO(n)$ が存在して，$g_1 x = \|x\| e_n$．再度 (1)' を用いると，ある $g_2 \in SO(n)$ が存在して，$g_2 e_n = e_n, g_2 g_1 y = y_{n-1} e_{n-1} + y_n e_n$．ここで，$g = g_2 g_1 \in SO(n)$ とおくと，$gx = \|x\| e_n, gy = y_{n-1} e_{n-1} + y_n e_n$．このとき，$\langle x, y\rangle = \langle gx, gy\rangle = \|x\| y_n$ だから，

$$|\langle x, y\rangle| = \|x\||y_n| \leq \|x\|\|gy\| = \|x\|\|y\|$$
$$``='' \Leftrightarrow y_{n-1} = 0 \Leftrightarrow gx /\!/ \ gy \Leftrightarrow x /\!/ \ y$$

ゆえに主張が示された． □

Cauchy-Schwarz の不等式については，次の節でさらに詳しく調べる．

2 Cauchy-Schwarz の不等式

次の定理とその証明がこの節の内容の雛型である．

定理 2.1. $x, y \in \mathbb{R}^3$ に対して，$\langle x, y\rangle^2 + \|x \times y\|^2 = \|x\|^2\|y\|^2$.

証明. $x = 0$ または $y = 0$ のとき主張が成り立つことは明らかだから，証明をするためには $x \neq 0, y \neq 0$ と仮定してよい．x を cx で置き換えると左辺，右辺共に c^2 倍される．同様のことは y についても言える．そこで証明を完成するためには $x, y \in S^2$ と仮定してよい．$S^2 \times S^2$ に $SO(3)$ を $g(x, y) = (gx, gy)$ で作用させると，この作用に関して等式の左辺と右辺は不変である．$SO(3)$ は S^2 に推移的に作用するから，$x = e_1$ と仮定して一般性を失わない．$SO(3)$ の e_1 におけるイソトロピー部分群は $SO(2)$ であり，$SO(2)$ は yz 平面内の S^1 に推移的に作用するから $y = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ と仮定して一般性を失わない．このとき，

$$\langle x, y\rangle^2 = \cos^2\theta, \|x \times y\|^2 = \sin^2\theta, \|x\|^2\|y\|^2 = 1$$

だから主張が従う． □

$\|x \times y\| \geq 0$ だから，上の等式より Cauchy-Schwarz の不等式

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\| \qquad (x, y \in \mathbb{R}^3)$$

が得られる．

2.1 $\mathbb{R}^n$ 内の Cauchy-Schwarz の不等式

次の Cauchy-Schwarz の不等式に 4 通りの証明を与える．次の問題の恒等式は後で使われる．

問題 2.1. [Lagrange の恒等式]　複素数 $z_1, \ldots, z_n, w_1, \ldots, w_n$ に対して

$$\left(\sum_{i=1}^n z_i w_i\right)^2 + \sum_{i<j}(z_i w_j - z_j w_i)^2 = \left(\sum_{i=1}^n z_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^n w_j^2\right)$$

が成り立つことを示せ．

定理 2.2. [Cauchy-Schwarz の不等式] $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して，

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$$

が成り立つ．等号成立条件は $x = 0$ または $y = 0$ または $x \neq 0, y \neq 0, x /\!/ y$ となることである．

証明 *1.* $x = 0$ のとき主張が成り立つことは明らかなので，$x \neq 0$ とする．任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して，

$$0 \leq \|tx + y\|^2 = \|x\|^2 t^2 + 2t\langle x, y\rangle + \|y\|^2$$

よって，右辺の t に関する 2 次式の判別式を D とすると，$D/4 \leq 0$．ここで，

$$0 \geq \frac{D}{4} = \langle x, y\rangle^2 - \|x\|^2\|y\|^2$$

よって，$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$.　　□　　□

証明 *2.* 問題 2.1 の Lagrange の恒等式において $z_1, \ldots, z_n, w_1, \ldots, w_n$ を実数にすることにより主張が得られる．□

証明 *3.* $x = 0$ または $y = 0$ のとき主張が成り立つことは明らかなので，$x \neq 0$ かつ $y \neq 0$ とする．$SO(n)$ は $\mathbb{R}^n$ の超球面 S^{n-1} に推移的に作用するので $g_1 \in SO(n)$ と $x_1 > 0$ が存在して，$g_1 x = x_1 e_1$．$SO(n-1) = SO(n)_{e_1}$ は $\mathbb{R}^{n-1}$ の超球面 S^{n-2} に推移的に作用するので $g_2 \in SO(n-1)$ と $y_2 \geq 0$ と実数 y_1 が存在して，$g_2 g_1 y = y_1 e_1 + y_2 e_2$．このとき，$g = g_2 g_1 \in SO(n)$ とおくと，$gx = x_1 e_1, gy = y_1 e_1 + y_2 e_2$．$SO(n)$ の $\mathbb{R}^n$ への作用は内積を保存するので，

$$
\begin{aligned}
&\langle x, y \rangle = \langle gx, gy \rangle = x_1 y_1, \\
&\|x\|\|y\| = \|gx\|\|gy\| = x_1 \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \geq x_1 |y_1| = |\langle x, y \rangle|
\end{aligned}
$$

等号成立 $\Leftrightarrow y_2 = 0 \Leftrightarrow x /\!/ y$. □

証明 *4.* 実数 $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ に対して

$$
\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}
$$

が成り立つことを示せばよい．$n = 1, 2$ のときは明らかに主張が成り立つ．n のとき主張が示されたとすると $n+1$ のとき，

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} a_i b_i &= \sum_{i=1}^n a_i b_i + a_{n+1} b_{n+1} \\
&\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} + a_{n+1} b_{n+1} \quad (\text{数学的帰納法の仮定}) \\
&\leq \sqrt{\left(\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}\right)^2 + a_{n+1}^2} \sqrt{\left(\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}\right)^2 + b_{n+1}^2} \quad (n = 2 \text{ の場合}) \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} b_i^2}
\end{aligned}
$$

ゆえに主張が成り立つ． □

2.2 $\mathbb{C}^n$ 内の Cauchy-Schwarz の不等式

$x, y \in \mathbb{C}^n$ を列ベクトルで表示して，x と y の Hermite 内積 $\langle x, y\rangle \in \mathbb{C}$ を

$$\langle x, y\rangle = {}^t\overline{x}y = x^*y$$

と定める．$\langle\ ,\ \rangle$ は $SU(n)$ の作用で不変である ($SU(n)$ の定義は §4.2 を参照)．

次の Cauchy-Schwarz の不等式に二通りの証明を与える．

定理 2.3. [Cauchy-Schwarz の不等式] $x, y \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ に対して，$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$ が成り立つ．等号成立条件は $\alpha \in \mathbb{C} - \{0\}$ が存在して $y = \alpha x$ となることである．

証明 *1.* 任意の $t \in \mathbb{C}$ に対して，

$$0 \leq \langle tx + y, tx + y\rangle = |t|^2\|x\|^2 + 2\mathrm{Re}(t\langle x, y\rangle) + \|y\|^2$$

ここで，$t = -\frac{1}{\|x\|^2}\overline{\langle x, y\rangle}$ とおいて計算して整理すると主張が得られる． □

証明 *2.* 後述の定理 4.4 より $SU(n)$ は $\mathbb{C}^n$ 内の超球面 S^{2n-1} に推移的に作用するので $g_1 \in SU(n)$ と $x_1 > 0$ が存在して，$g_1x = x_1e_1$．$SU(n-1) = SU(n)_{e_1}$ は $\mathbb{C}^{n-1}$ 内の超球面 S^{2n-3} に推移的に作用するので，$g_2 \in SU(n-1), y_1 \in \mathbb{C}, y_2 \geq 0$ が存在して，$g_2g_1y = y_1e_1 + y_2e_2$．$g = g_2g_1 \in SU(n)$ とおくと，$gx = x_1e_1, gy = y_1e_1 + y_2e_2$．$SU(n)$ の $\mathbb{C}^n$ への作用は内積を保存するから

$$\begin{aligned}
&\langle x, y\rangle = \langle gx, gy\rangle = x_1\overline{y_1}, \\
&\|x\|\|y\| = \|gx\|\|gy\| = x_1\sqrt{|y_1|^2 + y_2^2} \geq x_1|y_1| = |\langle x, y\rangle|
\end{aligned}$$

等号成立 $\Leftrightarrow y_2 = 0 \Leftrightarrow gy = \alpha gx\ (\exists\alpha \in \mathbb{C} - \{0\}) \Leftrightarrow y = \alpha x\ (\exists\alpha \in \mathbb{C} - \{0\})$ □

2.3 逆向きの Cauchy-Schwarz の不等式

$\mathbb{R}^n_1 = (\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle)$ で n 次元 Lorenz 空間を表す．$x \in \mathbb{R}^n_1$ が時間的であるとは $\langle x, x\rangle < 0$ となるときをいう．

定理 2.4 (逆向きの Cauchy-Schwarz 不等式)．$x, y \in \mathbb{R}^n_1$ で x を時間的とする．このとき，

$$\langle x, y\rangle^2 \geq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle.$$

等号成立条件は x と y が比例することである．[2]

証明. $\langle x, y\rangle, \langle x, x\rangle, \langle y, y\rangle$ は $O(n-1,1)$ の作用で不変である．$O(n-1,1)$ は $H^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n_1 \mid \langle x, x\rangle = -1\}$ に推移的に働くから，

$$x = (0, \cdots, 0, x_n)\ (x_n > 0),\ y = (y_1, 0, \cdots, 0, y_n)\ (y_1 \geq 0)$$

と仮定して一般性を失わない．このとき，

$$\langle x, y\rangle^2 = x_n^2 y_n^2 \geq x_n^2(y_n^2 - y_1^2) = -x_n^2(y_1^2 - y_n^2) = \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$$

等号成立条件は $y_1 = 0$ だから $x /\!/ y$. □

3 行列の階数

この節では学部 1 年生で既に学んだ行列の階数や行列の簡約化を軌道の幾何学の観点から見直す．定理 3.13 と定理 3.16 が主結果である．

3.1 行列の階数と階数標準形

K で可換体を表す．たとえば，$K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ を想定すればよい．$M(m, n; K)$ で K の元を成分とする (m, n) 行列全体のなす集合を表す．$M(m, n; K)$ には和・差と K の元との積が定義され自然な計算規則を満たす．$m = n$ のときには，$M_n(K) = M(n, n; K)$ とおく．

次の三種類の行列 $P_n(i, j), Q_n(i; \alpha), R_n(i, j; \beta) \in M_n(K)$ を n 次基本行

[2] O'Neill[4] の教科書，p. 144, Prop. 30 では x, y を共に時間的と仮定して結論を導いている．

列という.

$$P_n(i,j) = \begin{pmatrix} 1 & & & \vdots & & & & \vdots & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & & \vdots & & & \\ & & 1 & \vdots & & & & \vdots & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & \vdots & 1 & & & \vdots & & & \\ & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\ & & & \vdots & & & 1 & \vdots & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & \vdots & & & & \vdots & 1 & & \\ & & & \vdots & & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & \vdots & & & & \vdots & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q_n(i;\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & & & \vdots & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & 1 & \vdots & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \alpha & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & \vdots & 1 & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & \vdots & & & 1 \end{pmatrix} \text{(対角行列)}, \quad (\alpha \in K - \{0\})$$

$$R_n(i,j;\beta) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \vdots & & \\ & \ddots & & & \vdots & & \\ \cdots & \cdots & 1 & \cdots & \beta & \cdots & \cdots \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & \vdots & \ddots & \\ & & & & \vdots & & 1 \end{pmatrix} \qquad (\beta \in K)$$

例えば,

$$P_3(1,2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q_3(3;\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad R_3(1,2;\beta) = \begin{pmatrix} 1 & \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

基本行列の積について

$$
\begin{aligned}
&P_n(i,j)P_n(i,j) = E_n, \\
&Q_n(i;\alpha)Q_n(i;\alpha^{-1}) = Q_n(i;\alpha^{-1})Q_n(i;\alpha) = E_n, \\
&R_n(i,j;\beta)R_n(i,j;-\beta) = R_n(i,j;-\beta)R_n(i,j;\beta) = E_n
\end{aligned}
$$

が成り立つ．よって，$P_n(i,j), Q_n(i;\alpha), R_n(i,j;\beta)$ は正則行列であり

$$P_n(i,j)^{-1} = P_n(i,j), \quad Q_n(i;\alpha)^{-1} = Q_n(i;\alpha^{-1}), \quad R_n(i,j;\beta)^{-1} = R_n(i,j;-\beta)$$

次に一般の (m,n) 行列に左右から基本行列をかけることを考えよう．

(I) (m,n) 行列 A に左から $P_m(i,j)$ をかけると，A の第 i 行と第 j 行が入れ替わる．

(II) (m,n) 行列 A に左から $Q_m(i;\alpha)$ をかけると，A の第 i 行が α 倍される．

(III) (m,n) 行列 A に左から $R_m(i,j:\beta)$ をかけると，A の第 j 行の β 倍が第 i 行に加えられる．

行列 A に (I)∼(III) を施すことを**行基本操作**という．

(i) (m,n) 行列 A に右から $P_n(i,j)$ をかけると，A の第 i 列と第 j 列が入れ替わる．

(ii) (m,n) 行列 A に右から $Q_n(i;\alpha)$ をかけると，A の第 i 列が α 倍される．

(iii) (m,n) 行列 A に右から $R_n(i,j:\beta)$ をかけると，A の第 i 列の β 倍が第 j 列に加えられる．

行列 A に (i)∼(iii) を施すことを**列基本操作**という．

行基本操作と列基本操作を合わせて**基本操作**という．

行列 A に基本操作を施して行列 B になるとき，$A \to B$ と表す．

行列の零ベクトルでない行ベクトルの 0 でない最初の成分 (一番左の成分) をその行の**主成分**という．

定義 3.1. 次の条件 (1)∼(4) を満たす行列を**簡約行列**という．

(1) 行ベクトルのうちに零ベクトルがあれば，それは零ベクトルでないものより下にある．

(2) 零ベクトルでない行ベクトルの主成分は 1 である．

(3) 各行の主成分は下の行ほど右にある．

(4) 各行の主成分を含む列の他の成分はすべて 0 である．すなわち，第 i 行の主成分が a_{ij_i} ならば，第 j_i の a_{ij_i} 以外の成分はすべて 0 である．

命題 3.2. 任意の (m,n) 行列 A に対して，m 次基本行列のいくつかの積 U が存在して，UA は簡約行列になる．

実は上の簡約行列は A に対して一意に定まる (定理 3.15)．

命題 3.3. 任意の (m,n) 行列 A に対して，m 次基本行列のいくつかの積 U と n 次の基本行列のいくつかの積 V で

$$UAV = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \qquad (r \geq 0)$$

となるものが存在する．

命題 3.4. 次が成り立つ．

(1) 基本行列のいくつかの積は正則行列である．

(2) 正則行列は基本行列のいくつかの積になる．

証明. (1) 基本行列は正則行列で正則行列のいくつかの積は正則行列だから，主張が従う．

(2) n 次正則行列 A に対して基本行列のいくつかの積 U, V が存在して，

$$UAV = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

左辺は正則だから右辺も正則である．よって，$r = n, UAV = E_n$．ゆえに $A = U^{-1}V^{-1}$ となり A は基本行列のいくつかの積になる． □

上の二つの命題から，次の命題が従う．

命題 3.5. 任意の (m,n) 行列 A に対して，m 次正則行列 P と n 次正則行列 Q が存在して

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

という形になる．ここで，$r \leq \min\{n,m\}$.

命題 3.5 の r が正則行列 P,Q の取り方によらず A のみで定まることを示したい．いくつかの準備の後にこれを示す.

$u_1,\cdots,u_k \in K^n$ に対して，集合 $\left\{\sum_{i=1}^{k} x_i u_i \mid x_1,\cdots,x_k \in K\right\}$ を簡単に $\sum_{i=1}^{k} K u_i$ と表す：

$$\sum_{i=1}^{k} K u_i = \left\{\sum_{i=1}^{k} x_i u_i \mid x_1,\cdots,x_k \in K\right\}$$

この集合は K^n の部分空間になる．これを $u_1,\cdots,u_k$ の**張る**部分空間という.

命題 3.6. (m,n) 行列 A に対して，命題 3.5 のように，m 次正則行列 P と n 次正則行列 Q をとる．このとき，

$$\mathrm{Ker}(A) = \sum_{i=r+1}^{n} KQe_i, \quad \mathrm{Im}(A) = \sum_{i=1}^{r} KP^{-1}e_i$$

証明. P,Q の取り方から

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \quad ここで，\quad r \leq \min\{n,m\}$$

(1) 線形写像 A の核は

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}(A) &= \left\{ \boldsymbol{x} \in K^n \mid P^{-1} \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q^{-1}\boldsymbol{x} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \boldsymbol{x} \in K^n \mid \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q^{-1}\boldsymbol{x} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \boldsymbol{x} \in K^n \mid Q^{-1}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} O \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} \in K^{n-r} \right\} \\
&= \left\{ Q \begin{pmatrix} O \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} \mid \boldsymbol{y} \in K^{n-r} \right\} = \sum_{i=r+1}^{n} KQe_i
\end{aligned}$$

(2) 線形写像 A の像は

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(A) &= P^{-1} \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q^{-1}K^n = P^{-1} \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} K^n \qquad (Q\text{: 正則}) \\
&= P^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ O \end{pmatrix} \mid \boldsymbol{x} \in K^r \right\} \\
&= \sum_{i=1}^{r} KP^{-1}e_i
\end{aligned}$$

よって主張が成り立つ. □

問題 3.1. 次を示せ.

(1) 命題 3.6 の $\{Qe_{r+1}, \ldots, Qe_n\}$ は線形独立である.

(2) 命題 3.6 の $\{P^{-1}e_1, \ldots, P^{-1}e_r\}$ は線形独立である.

命題 3.7. A を (m, n) 行列とする.

(1) 線形写像 A の核が $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$ を満たせば, $n \leq m$.

(2) 線形写像 A の像が $\mathrm{Im}(A) = K^m$ を満たせば, $m \leq n$.

証明. (1) 前命題より

$$\mathrm{Ker}(A) = \{0\} \Leftrightarrow n = r (\leq \min\{n, m\}). \tag{3.1}$$

このとき, $n \leq m$.

(2) 前命題より

$$\mathrm{Im}(A) = P^{-1}\left(\sum_{i=1}^{r} Ke_i\right)$$

よって，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(A) = K^m &\Leftrightarrow P^{-1}\left(\sum_{i=1}^{r} Ke_i\right) = K^m \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{r} Ke_i = P(K^m) \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{r} Ke_i = K^m \quad (P : \text{正則}) \\
&\Leftrightarrow m = r(\leq \min\{n, m\})
\end{aligned}$$

ゆえに，$\mathrm{Im}(A) = K^m$ ならば，$m \leq n$. □

系 3.8. K^n から K^m の一対一上への線形写像が存在すれば，$n = m$.

系 3.9. X を (m, n) 行列，Y を (n, m) 行列とする．$XY = E_m$, $YX = E_n$ となったとすると，$m = n$ であり，Y は X の逆行列である．

証明. X の定める線形写像 $X : K^n \to K^m$ について，$X\boldsymbol{x} = X\boldsymbol{y}$ となったとすると，両辺に左から Y をかけて $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$. よって，$X$ は単射である．任意の $\boldsymbol{z} \in K^m$ に対して，$\boldsymbol{x} = Y\boldsymbol{z} \in K^n$ とおくと，両辺に左から X をかけて $X\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}$. よって，$X$ は全射である．系 3.8 より，$m = n$. 逆行列の定義から $Y = X^{-1}$. □

問題 3.2. m, n を $m \leq n$ となる自然数とする．

(1) 写像

$$i : K^m \to K^n; \boldsymbol{x} \mapsto \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$

は単射線形写像であることを示せ．また，i の表現行列を求めよ．

(2) 写像

$$p : K^n \to K^m ; \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

は全射線形写像であることを示せ．また，$\mathrm{Ker}(p)$ を求めよ．さらに p の表現行列を求めよ．

(3) 合成写像 $p \circ i : K^m \to K^m$ と $i \circ p : K^n \to K^n$ のそれぞれの表現行列を求めよ．

定理 3.10. A を (m,n) 行列とする．m 次正則行列 P_1, P_2 と n 次正則行列 Q_1, Q_2 が存在して，

$$P_1 A Q_1 = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad P_2 A Q_2 = \begin{pmatrix} E_s & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

となったとすると，$r = s$.

証明. $P = P_2 P_1^{-1}, Q = Q_2^{-1} Q_1$ とおくと，P は m 次正則行列，Q は n 次正則行列であり，

$$P \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_s & O \\ O & O \end{pmatrix} Q$$

そこで，(m,n) 行列 B を

$$B = P \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_s & O \\ O & O \end{pmatrix} Q$$

によって，定めると線形写像 $B : K^n \to K^m$ の像は

$$\mathrm{Im}(B) = B(K^n) = \begin{pmatrix} E_s & O \\ O & O \end{pmatrix} (K^n) = \left\{ \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \mid \boldsymbol{x} \in K^s \right\}$$

線形写像 B の核は

$$\mathrm{Ker}(B) = \left\{ \boldsymbol{x} \in K^n \mid \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{x} \end{pmatrix} \mid \boldsymbol{x} \in K^{n-r} \right\}$$

そこで，線形写像 B の定義域を K^n の部分空間

$$\left\{ \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \mid \boldsymbol{x} \in K^r \right\}$$

に制限したものを $B_{|K^r}$ と表す．この線形写像 $B_{|K^r}$ の核は

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(B_{|K^r}) &= \mathrm{Ker}(B) \cap \left\{ \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \mid \boldsymbol{x} \in K^r \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{x} \end{pmatrix} \mid \boldsymbol{x} \in K^{n-r} \right\} \cap \left\{ \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \mid \boldsymbol{x} \in K^r \right\} = \{0\} \end{aligned}$$

像は

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \mid \boldsymbol{x} \in K^s \right\} = \mathrm{Im}(B) &= \left\{ B \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} \middle| \boldsymbol{x} \in K^r, \boldsymbol{y} \in K^{n-r} \right\} \\ &= \left\{ B \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} \middle| \boldsymbol{x} \in K^r, \boldsymbol{y} \in K^{n-r} \right\} \\ &= \left\{ B \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \middle| \boldsymbol{x} \in K^r \right\} = \mathrm{Im}(B_{|K^r}) \end{aligned}$$

写像 i, p を

$$i : K^r \xrightarrow{i} \left\{ \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \mid \boldsymbol{x} \in K^r \right\}; \boldsymbol{x} \mapsto \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix},$$

$$p : \left\{ \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \mid \boldsymbol{x} \in K^s \right\} \to K^s; \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \mapsto \boldsymbol{x}$$

と定める．全単射線形写像

$$\mathbb{R}^r \xrightarrow{i} \left\{ \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \mid \boldsymbol{x} \in K^r \right\} \xrightarrow{B} \left\{ \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \mid \boldsymbol{x} \in K^s \right\} \xrightarrow{p} K^s$$

が得られる．系 3.8 より，$r = s$． □

定義 3.11. 上の定理を踏まえて，命題 3.5 中の r を A の**階数**といい，$r = \mathrm{rank}(A)$ と表す．また，命題 3.5 中の行列

$$\begin{pmatrix} E_r & O \\ 0 & O \end{pmatrix}$$

を A の**階数標準形**という．

問題 3.3. (m,n) 行列 A に対して，$\mathrm{rank}({}^tA)=\mathrm{rank}(A)$ となることを示せ．

問題 3.4. (例題 1.1 を参照)

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2^2 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & x_n^2 \end{pmatrix}$$

を求めよ．

命題 3.12. 任意の (m,n) 行列 A，任意の m 次正則行列 P_1，任意の n 次正則行列 Q_1 に対して

$$\mathrm{rank}(P_1AQ_1)=\mathrm{rank}(A)$$

証明. $r=\mathrm{rank}(A)$ とおくと，m 次正則行列 P と n 次正則行列 Q が存在して

$$PAQ=\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

このとき，$PP_1^{-1},Q_1^{-1}Q$ は正則行列であり，

$$(PP_1^{-1})(P_1AQ_1)(Q_1^{-1}Q)=PAQ=\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

ゆえに，$\mathrm{rank}(P_1AQ_1)=\mathrm{rank}(A)$． □

$GL(n,K)=\{g\in M_n(K)\mid g:\text{正則}\}$ とおく．$GL(n,K)$ は行列の積に関して群になる．$M(m,n;K)$ に $GL(m,K)\times GL(n,K)$ を次のように作用させる．

$$(g,h)X=gXh^{-1}$$

この作用による軌道空間を $GL(m,K)\backslash M(m,n;K)/GL(n,K)$ と表す．行列の階数はこの軌道に対して定まるといってもよい．

定理 3.13.

$$\begin{aligned}&GL(m,K)\backslash M(m,n;K)/GL(n,K)\\ &=\left\{GL(m,K)\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}GL(n,K)\,\middle|\, r=0,1,\cdots,\min\{m,n\}\right\}\\ &\cong\{0,1,\cdots,\min\{m,n\}\}\end{aligned}$$

上の定理はより正確には，

$$
\begin{aligned}
&GL(m,K)\backslash M(m,n;K)/GL(n,K)\\
&=\left\{ GL(m,K)\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} GL(n,K) \,\middle|\, r=0,1,\cdots,\min\{m,n\} \right\}
\end{aligned}
$$

であり，写像

$$
\begin{aligned}
&GL(m,K)\backslash M(m,n;K)/GL(n,K) \to \{0,1,\cdots,\min\{m,n\}\};\\
&GL(m,K)\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} GL(n,K) \mapsto r
\end{aligned}
$$

が well-defined で全単射であることを意味する．

命題 3.7 の証明と行列の階数の定義から次が得られる．

定理 3.14. A を (m,n) 行列とし，$r=\mathrm{rank}(A)$ とおく．

(1) $\mathrm{Ker}(A)=\{0\} \Leftrightarrow n=r$

(2) $\mathrm{Im}(A)=K^m \Leftrightarrow m=r$

3.2 簡約化行列の一意性

この節では，命題 3.2 に現れる行列 A の簡約化が行列 A に対して，一意に定まることを示す.[3]

定理 3.15. $A,B\in M(m,n;K)$ を共に行列 $X\in M(m,n;K)$ の簡約化とすると，$A=B$.

上の定理 3.15 を示すためには次の定理を示せばよい．

定理 3.16. $A,B\in M(m,n;K)$ を共に簡約行列とする．$g\in GL(m,K)$ が存在して，$B=gA$ となったとすると，$A=B$.

証明. A,B をそれぞれ列ベクトルを並べて，

$$A=(a_1,\cdots,a_n),\quad B=(b_1,\cdots,b_n)$$

[3] この節の内容は [9] を参考にした．

と表示すると，$B = gA$ より，$b_i = ga_i$ となる．特に，$a_i = 0 \Leftrightarrow b_i = 0$ が成り立つ．$x = {}^t(x_1, \cdots, x_n) \in K^n$ に対して，

$$Ax = \sum_{j=1}^{n} x_j a_j, \quad Bx = gAx = \sum_{j=1}^{n} x_j b_j$$

となるから

$$\sum_{j=1}^{n} x_j a_j = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} x_j b_j = 0$$

が成り立つ．特に，部分集合 $\{j_1, \cdots, j_k\} \subset \{1, \cdots, n\}$ に対し，

$$\{a_{j_1}, \cdots, a_{j_k}\} \text{ が線形独立} \Leftrightarrow \{b_{j_1}, \cdots, b_{j_k}\} \text{ が線形独立} \tag{3.2}$$

が成り立つ．$A = (a_1, \cdots, a_n)$ から零列ベクトルを取り除いて得られる行列を $A' = (a_{l_1}, \cdots, a_{l_p})$ とすると，B から零列ベクトルを取り除いて得られる行列は $B' = (b_{l_1}, \cdots, b_{l_p})$ となる．このとき，$B' = gA'$．主張を証明するためには $A' = B'$ を示せばよい．A', B' は簡約行列だから，始めから，

$$a_j \neq 0, \quad b_j \neq 0 \quad (1 \leq i \leq n)$$

と仮定して一般性を失わない．このとき，

$$a_1 = b_1 = e_1$$

となる．$1 \leq l \leq n$ に対し，A, B それぞれの第 1 列から第 l 列までを並べてできる行列を A_l, B_l と表す：

$$A_l = (a_1, \cdots, a_l), \quad B = (b_1, \cdots, b_l)$$

A, B は簡約行列だから，A_l, B_l も簡約行列である．$B = gA$ より，$B_l = gA_l$．命題 3.12 より，$r_l := \mathrm{rank}(A_l) = \mathrm{rank}(B_l)$．$l$ に関する数学的帰納法で $A_l = B_l$ を示す．$l = 1$ のときは，$A_1 = e_1 = B_1$．$A_l = B_l$ と仮定して，$A_{l+1} = B_{l+1}$ を示す．$A_l = B_l$ より，$1 \leq j_1 < \cdots < J_{r_l}$ が存在して，

$$e_i = a_{j_i} = b_{j_i} \quad (1 \leq i \leq r_l)$$

(3.2) より，

$$\{e_1 \cdots, e_{r_l}, a_{l+1}\} \text{ が線形独立} \Leftrightarrow \{e_1 \cdots, e_{r_l}, b_{l+1}\} \text{ が線形独立}$$

$\{e_1 \cdots, e_{r_l}, a_{l+1}\}$ が線形従属のとき，

$$a_{l+1} = \sum_{j=1}^{r_l} c_j e_j \quad (c_j \in K)$$

と表される．$B_l = gA_l = A_l$ より，$ge_j = e_j$ $(1 \leq j \leq r_l)$ だから，$b_{l+1} = ga_{l+1} = a_{l+1}$ が得られる．$\{e_1 \cdots, e_{r_l}, a_{l+1}\}$ が線形独立のとき，A_{l+1}, B_{l+1} は簡約行列だから，$a_{l+1} = e_{l+1} = b_{l+1}$．ゆえに，$A_{l+1} = B_{l+1}$ が示された．

数学的帰納法により任意の l について，$A_l = B_l$．特に，$l = n$ とおき，$A = B$． □

$M(m, n; K)$ に $GL(m, K)$ を $GL(m, K)$ の元を $M(m, n; K)$ に左から掛けることで作用させる．この作用による軌道空間を $GL(m, K)\backslash M(m, n; K)$ と表す．

定理 3.17.

$$\begin{aligned} GL(m, K)\backslash M(m, n; K) &= \{GL(m, K)(\text{簡約行列}) \mid (\text{簡約行列})\} \\ &\cong \{(\text{簡約行列})\} \end{aligned}$$

問題 3.5. $M(m, n; K)$ に $GL(n, K)$ を次のように作用させる：

$$\rho(g)X = Xg^{-1} \qquad (g \in GL(n, K), X \in M(m, n; K))$$

この作用による軌道空間 $M(m, n; K)/GL(n; K)$ を上の定理のように表示せよ．

4 球面に推移的に作用する群

この節では特殊直交群の球面への自然な作用が推移的になることを示す．また，特殊ユニタリー群を定義し，その球面への自然な作用も推移的になることを示す．

球面に推移的に作用する群は他にも知られている．これについては [1, p. 179] を参照せよ．

4.1 特殊直交群

定理 4.1. 自然数 $n \geq 2$ に対し，S^{n-1} は $SO(n)$-等質空間である．

証明. この主張は，$S^{n-1}(r)$ は $SO(n)$-等質空間である，と言っても同じことである．任意の $x \in S^{n-1}$ に対し，$g \in SO(n)$ が存在して，$gx = e_1$ となることを示せばよい．$n \geq 2$ に関する数学的帰納法で主張を示す．

(1) $n = 2$ のとき，

$$S^1 = \left\{ x(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \middle| \, \theta \in \mathbb{R} \right\},$$
$$SO(2) = \left\{ g(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \middle| \, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

となる．三角関数の加法定理を用いて，$g(\alpha)x(\theta) = x(\alpha + \theta)$．特に，任意の θ に対し，$g(-\theta)x(\theta) = x(0) = e_1$．ゆえに主張が成り立つ．

(2) 一般の場合，$SO(n)$ は $SO(2)$ と $SO(n-1)$ のそれぞれに同型な部分群

$$G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} E_{n-2} & O \\ O & g \end{pmatrix} \middle| \, g \in SO(2) \right\} \cong SO(2),$$
$$G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} g & O \\ O & 1 \end{pmatrix} \middle| \, g \in SO(n-1) \right\} \cong SO(n-1)$$

をもつことに注意する．$\mathbb{R}^{n-1}$ を次のようにして $\mathbb{R}^n$ の部分空間と見なす．

$$\mathbb{R}^{n-1} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, x \in \mathbb{R}^{n-1} \right\} \subset \mathbb{R}^n$$

(1) より，任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対し，$g_1 \in G_1$ が存在して，$g_1 x \in \mathbb{R}^{n-1}$．数学的帰納法の仮定より，$g_2 \in G_2$ が存在して，$(g_2 g_1)x = g_2(g_1 x) = e_1$．$g_2 g_1 \in SO(n)$ だから主張が成り立つ． □

問題 4.1. [Hadamard の不等式 I] $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ を n 個の n 次列ベクトルとする．このとき，

$$|\det(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)| \leq \|\boldsymbol{a}_1\| \cdots \|\boldsymbol{a}_n\|,$$
$$\text{“}=\text{”} \Leftrightarrow \boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n \text{は互いに直交}$$

となることを示せ．

ヒント．(1) まず，

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{3n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

という特別な形のベクトルに対して，主張が正しいことをいう．

(2) 直交行列 $T \in O(n)$ と任意の $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^n$ に対して，

$$|\det(T\boldsymbol{a}_1, \cdots, T\boldsymbol{a}_n)| = |\det(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)|, \quad \|T\boldsymbol{a}_j\| = \|\boldsymbol{a}_j\|$$

となることを言う．

(3) 最後に (1),(2) を組み合わせて一般の場合には (1) に帰着されることをいう．

4.2 特殊ユニタリー群

$GL(n, \mathbb{C})$ の部分群 $U(n)$ を

$$U(n) = \{g \in GL(n, \mathbb{C}) \mid g^* g = E_n\} \quad \text{ただし } g^* = {}^t\overline{g}$$

で定義し，これを n **次ユニタリー群**という．$U(n)$ の元を**ユニタリー行列**という．複素 Euclid 空間 $\mathbb{C}^n$ の標準 Hermite 内積を $\langle\ ,\ \rangle$ と表すと，

$$\begin{aligned} U(n) &= \{g \in GL(n, \mathbb{C}) \mid g^* = g^{-1}\} \\ &= \{g \in GL(n, \mathbb{C}) \mid \langle gx, gy\rangle = \langle x, y\rangle \quad (x, y \in \mathbb{C}^n)\} \end{aligned}$$

が成り立つ．$g \in U(n)$ に対し，$|\det(g)| = 1$ が成り立つ．これを踏まえて，$U(n)$ の部分群 $SU(n)$ を

$$SU(n) = \{g \in U(n) \mid \det g = 1\}$$

と定義し，これを**特殊ユニタリー群**という．$SU(n)$ の元を**特殊ユニタリー行列**という．

命題 4.2. 複素数を成分とする n 次正方行列 $U = (u_1, \cdots, u_n)$ に対して次の条件は同値になる：

(1) U はユニタリー行列である．

(2) $U^*U = E_n$

(3) $UU^* = E_n$

(4) $\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}$

証明. (1) ⇔ (2) ⇔ (3) は明らかである．$U = (u_1, \cdots, u_n) \in M_n(\mathbb{C})$ に対して

$$U^*U = \begin{pmatrix} {}^t\overline{u_1} \\ \vdots \\ {}^t\overline{u_n} \end{pmatrix} (u_1, \cdots, u_n) = ({}^t\overline{u_i}u_j)_{1\leq i,j\leq n} = (\langle u_i, u_j \rangle)_{1\leq i,j\leq n}$$

よって，(2) ⇔ (4) が成り立つ． □

問題 4.2. 次を示せ．

(1) n 次ユニタリー行列の全体 $U(n)$ は行列の積に関して群になる．

(2) 任意の $T \in U(n)$ に対して，$|\mathrm{det}T| = 1$.

問題 4.3. 任意の複素正則行列 P は，ユニタリー行列 T と正則な上三角行列 U の積として $P = TU$ と表されることを示せ．

問題 4.4. 次を示せ．

(1) $SU(n) = \{T \in U(n) \mid \det(T) = 1\}$ とおくと，$SU(n)$ は行列の積に関して群になる．

(2)

$$\begin{aligned} SU(2) &= \left\{ \begin{pmatrix} z & -\overline{w} \\ w & \overline{z} \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} z, w \in \mathbb{C}, \\ |z|^2 + |w|^2 = 1 \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} z & -\overline{w} \\ w & \overline{z} \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} z = \cos\theta_1 + i\cos\theta_2 \sin\theta_1, \\ w = \cos\theta_3 \sin\theta_2 \sin\theta_1 + i \sin\theta_3 \sin\theta_2 \sin\theta_1, \\ 0 \leq \theta_1 \leq \pi, 0 \leq \theta_2 \leq \pi, \\ 0 \leq \theta_3 \leq 2\pi \end{array} \right\} \end{aligned}$$

命題 4.3. 自然数 n に対し，S^{2n-1} は $U(n)$-等質空間である．

証明. この主張は，$S^{2n-1}(r)$ は $U(n)$-等質空間である，と言っても同じことである．自然数 n に関する数学的帰納法で主張を示す.

(1) $n=1$ のとき，$S^1=\{x\in\mathbb{C}\mid |x|=1\}=U(1)$ となるので主張が成り立つ.

(2) $n\geq 2$ のとき，$U(n)$ は次の部分群をもつことに注意する.

$$G_k=\left\{\begin{pmatrix}E_{k-1} & & \\ & g & \\ & & E_{n-k}\end{pmatrix}\middle|\, g\in U(1)\right\}\cong U(1)\quad (k=1,2,\cdots,n),$$

$$SO(n)$$

また，$\mathbb{R}^n$ を $\mathbb{C}^n$ の実部分空間とみなす．(1) より，任意の $x\in S^{2n-1}$ に対し，$g_1\in G_1,\cdots,g_n\in G_n$ が存在して，$g_1\cdots g_n x\in\mathbb{R}^n\cap S^{2n-1}=S^{n-1}$. 定理 4.1 より，$k\in SO(n)$ が存在して，$kg_1\cdots g_n x=e_1$. $kg_1\cdots g_n\in U(n)$ だから主張が成り立つ. □

問題 4.5. 次を示せ.

(1) $g\in U(n)$ とする．$k\in\mathbb{C}$ に対し，

$$\begin{aligned} kg\in SU(n) &\Leftrightarrow k\in U(1)(\subset\mathbb{C}), k^n=|g|^{-1}\\ &\Leftrightarrow k^n=|g|^{-1}\end{aligned}$$

(2) 任意の $g\in U(n)$ に対し，ある $k\in U(1)$ が存在して，$kg\in SU(n)$.

問題 4.6. [Hadamard の不等式 II] 次を示せ．$\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n\in\mathbb{C}^n-\{0\}$ に対して，

$$|\det(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)|\leq\prod_{j=1}^n|\boldsymbol{a}_j|$$

$$\text{“}=\text{''}\Leftrightarrow \boldsymbol{a}_i^*\boldsymbol{a}_j=0\quad (i\neq j)$$

定理 4.4. 自然数 $n\geq 2$ に対し，S^{2n-1} は $SU(n)$-等質空間である.

証明. 命題 4.3 より，任意の $x\in S^{2n-1}$ に対し，$g\in U(n)$ が存在して，$gx=e_1$. 問題 4.5 より，上の $g\in U(n)$ に対し，$k\in U(1)$ が存在して，$g_1:=kg\in SU(n)$. このとき，$g_1x=kgx=ke_1$.

$$g_2=\begin{pmatrix}k^{-1} & & \\ & k & \\ & & E_{n-2}\end{pmatrix}$$

とおくと，$g_2 \in SU(n)$ であり，

$$g_2 g_1 x = g_2 e_1 = k^{-1} k e_1 = e_1$$

ゆえに主張が示された． □

系 4.5. $\mathbb{C}^n$ の複素 k 次元複素部分空間 V に対して，$g \in SU(n)$ が存在して，$gV = \sum_{j=1}^{k} \mathbb{C} e_j$.

5 Jordan 標準形と行列の指数写像

この節の目的は X を与えられた n 次正方行列とし，n 次正方行列に値を持つ関数 $A(t)$ に関する微分方程式 $\dot{A}(t) = XA(t)$ を初期条件 $A(0) = 1$ (1 は n 次単位行列) の下で解くことである (定理 5.5)．$n = 1$ のとき，解は $A(t) = e^{tX}$ だから，この問題は指数関数の定義域を正方行列の場合に拡張することに他ならない．

複素数 z を変数とする指数関数 e^z は

$$e^z = \exp z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} \quad (\text{収束半径 } \infty)$$

とテーラー展開できる．右辺の級数は任意の z について e^z に収束する．上の式の z を n 次正方行列 X で置き換えた級数

$$\exp X = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{X^m}{m!} = E_n + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \cdots$$

について考える．与えられた正方行列 X に対して上の級数が収束するかどうかは問題であるが,[4]まず，いくつかの例について $\exp X$ を計算してみよう．

例 5.1. (1) n 次対角行列

$$X = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$$

[4]この級数が収束するとは，部分和が収束することである．部分和が収束するとは，行列の各成分が収束することである．

に対して

$$\exp X = \begin{pmatrix} e^{a_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{a_n} \end{pmatrix}$$

(2) n 次上三角行列 N を

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$$

と定めると，$N^n = O$ となる．よって，

$$\exp tN = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{t^l N^l}{l!}$$

例題 5.1. n 次正方行列

$$J_n(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & & & O \\ 0 & \alpha & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad (\alpha \text{ は複素数})$$

に対して n 次上三角行列 N を

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$$

と定めると

$$\exp tJ_n(\alpha) = e^{t\alpha} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{t^l N^l}{l!}$$

となることを示せ.

証明. $J_n(\alpha) = \alpha E_n + N$ で αE_n と N は可換だから，通常の二項定理が使えて，

$$(J_n(\alpha))^m = \sum_{k=1}^{m} {}_mC_k \alpha^{m-k} N^k$$

$N^n = O$ に注意して，

$$\begin{aligned}
\exp tJ_n(\alpha) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} \sum_{k=0}^{m} {}_mC_k \alpha^{m-k} N^k = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m} \frac{t^m}{m!} {}_mC_k \alpha^{m-k} N^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m=k}^{\infty} \frac{t^m}{m!} {}_mC_k \alpha^{m-k} \right) N^k \quad (N \text{ のべきについて整理}) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^{k+l}}{(k+l)!} {}_{k+l}C_k \alpha^{l} \right) N^k \quad (N^n = 0) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^l \alpha^l}{l!} \right) \frac{t^k}{k!} N^k = e^{t\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} N^k
\end{aligned}$$

□

問題 5.1. $|\alpha| < 1$ のとき，$\lim_{m\to\infty} J_n(\alpha)^m = 0$ となることを示せ.

例題 5.1 で扱った正方行列 $J_n(\alpha)$ を **Jordan** 細胞という.[5]

問題 5.2. 次を示せ.

(1) 2 次交代行列

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ に対して } \exp tJ = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

(2) 2 次対称行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ に対して } \exp tA = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}.$$

(3) 成分が全て 1 の n 次正方行列

$$X = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \text{ に対して } \exp tX = E_n + \frac{1}{n}(e^{tn} - 1)X$$

[5]細胞と言っても生物学とは関係ない．英語の Jordan cell の日本語訳.

任意の X について $\exp X$ は収束することを示したい．そのために線形代数でよく知られている事実を援用する．

定理 5.2. ([6, p. 178]) 複素数を成分とする任意の n 次正方行列 X に対して複素数を成分とする正則行列 P と Jordan 細胞 $J_{n_1}(\alpha_1), \cdots, J_{n_k}(\alpha_k)$ が存在して

$$X = P \begin{pmatrix} J_{n_1}(\alpha_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_k}(\alpha_k) \end{pmatrix} P^{-1}. \tag{5.3}$$

問題 5.3. 定理 5.2 中の $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ は X の固有値全部と一致することを示せ．

定理 5.3. (1) 任意の X について $\exp X$ は収束する．

(2) $\exp(X^*) = (\exp X)^*$.

(3) $\det(\exp X) = \exp(\mathrm{tr} X) \neq 0$. 特に，$\exp X$ は正則である．

証明. (1) X を定理 5.2 の (5.3) の形に変形すると

$$\exp X = P \begin{pmatrix} \exp(J_{n_1}(\alpha_1)) & & \\ & \ddots & \\ & & \exp(J_{n_k}(\alpha_k)) \end{pmatrix} P^{-1}. \tag{5.4}$$

(2) X が Jordan 細胞 $J_n(\alpha) = \alpha E_n + N$ のときに主張を示せばよい．$J_n(\alpha)^* = \overline{\alpha} E_n + {}^tN$ より

$$\exp(J_n(\alpha)^*) = e^{\overline{\alpha}} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{{}^tN^l}{l!} = (\exp J_n(\alpha))^*$$

(3) (1) の証明中の (5.4) 式を用いると

$$\begin{aligned} \det(\exp X) &= \det(\exp(J_{n_1}(\alpha_1)) \cdots \det(\exp(J_{n_k}(\alpha_k)) \quad ((5.4)\text{ 式}) \\ &= \exp(n_1\alpha_1) \cdots \exp(n_k\alpha_k) \quad (\text{例題 } 5.1) \\ &= \exp(n_1\alpha_1 + \cdots + n_k\alpha_k) \\ &= \exp(\mathrm{tr}\,(X)) \end{aligned}$$

ゆえに主張が示された． □

問題 5.4. n 次正方行列 X の任意の固有値 α が $|\alpha| < 1$ を満たせば，$\lim_{m\to\infty} X^m = 0$ となることを示せ．

問題 5.5. α の実部が負のとき，$\lim_{t\to\infty} \exp tJ_n(\alpha) = 0$ となることを示せ．

定数係数斉次線形微分方程式

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = 0$$

について考えよう．新しい未知関数 $y_0 = y, y_1, \cdots, y_{m-1}$ を導入するとこれは次の連立微分方程式と同値である．

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ -(a_1 y_{n-1} + \cdots + a_{n-1}y_1 + a_n y_0) \end{pmatrix}$$

ただし，左辺の列ベクトルの微分は各成分を微分することを表す．ここで，

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}$$

とおくと，この連立微分方程式は $\boldsymbol{y}' = X\boldsymbol{y}$ と表せる．

そこで X を与えられた n 次の正方行列とするとき，n 次列ベクトルを未知関数とする連立微分方程式

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{y} = X\boldsymbol{y}$$

について考えよう．

例題 5.2. n 次列ベクトル $\boldsymbol{y}(t)$ を未知関数とする連立微分方程式

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{y}(t) = J_n(\alpha)\boldsymbol{y}(t), \quad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0$$

の解は

$$\boldsymbol{y}(t) = \exp(tJ_n(\alpha))\boldsymbol{y}_0$$

によって与えられることを示せ．

証明．$\boldsymbol{y}(t)$ と $\boldsymbol{y}_0$ の第 i 成分をそれぞれ $y_i(t)$ と y_{i0} で表すと与えられた連立微分方程式は

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \alpha y_1 + y_2, \\ \vdots \\ \dot{y}_i = \alpha y_i + y_{i+1}, \\ \vdots \\ \dot{y}_{n-1} = \alpha y_{n-1} + y_n, \\ \dot{y}_n = \alpha y_n \end{cases}$$

と表される．最後の微分方程式 $\dot{y}_n = \alpha y_n$ より

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(e^{-\alpha t} y_n) &= e^{-\alpha t}\dot{y}_n - \alpha e^{-\alpha t} y_n \quad (\text{積の微分法}) \\ &= e^{-\alpha t}(\dot{y}_n - \alpha y_n) = 0 \end{aligned}$$

初期条件 $y_n(0) = y_{n0}$ を考慮して，$y_n = y_{n0}e^{\alpha t}$ が得られる．これを一つ上の微分方程式に代入して

$$\dot{y}_n - \alpha y_n = y_{n0}e^{\alpha t}.$$

積の微分法を用いて変形して

$$\frac{d}{dt}(e^{-\alpha t} y_{n-1}) = y_{n0}$$

積分して

$$y_{n-1} = e^{\alpha t}(y_{n0}t + y_{n-1,0})$$

これを帰納的に繰り返して

$$y_{i+1} = e^{\alpha t} \sum_{j=0}^{n-i-1} \frac{t^j}{j!} y_{i+j+1,0}$$

が得られたとすると，これを一つ上の微分方程式に代入して

$$\dot{y}_i = \alpha y_i + e^{\alpha t} \sum_{j=0}^{n-i-1} \frac{t^j}{j!} y_{i+j+1,0}$$

積の微分法を用いて変形して

$$\frac{d}{dt}(e^{-\alpha t}y_i) = \sum_{j=0}^{n-i-1} \frac{t^j}{j!} y_{i+j+1,0}$$

積分して

$$y_i = e^{\alpha t}\left(\sum_{j=0}^{n-i-1} \frac{t^{j+1}}{(j+1)!} y_{i+j+1,0} + y_{i,0}\right) = e^{\alpha t}\sum_{j=0}^{n-i} \frac{t^j}{j!} y_{i+j,0}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y} &= e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{t^j}{j!} y_{j+1,0} \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^{n-i} \frac{t^j}{j!} y_{j+i,0} \\ \vdots \\ y_{n,0} \end{pmatrix} \\
&= e^{\alpha t}\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & t \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{y}_0 \\
&= \exp(tJ_n(\alpha))\boldsymbol{y}_0
\end{aligned}$$

よって主張が得られた． □

定理 5.4. X を n 次正方行列とする．n 次列ベクトル $\boldsymbol{y}(t)$ を未知関数とする連立微分方程式

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{y}(t) = X\boldsymbol{y}(t), \quad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0$$

の解は

$$\boldsymbol{y}(t) = \exp(tX)\boldsymbol{y}_0$$

によって与えられる．

証明. 定理 5.2 により X は (5.3) の形になる．未知関数を $\boldsymbol{z}(t) = P^{-1}\boldsymbol{y}(t)$ と変換すると $\boldsymbol{z}(t)$ に関する連立微分方程式

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{z}(t) = (P^{-1}XP)\boldsymbol{z}(t), \quad \boldsymbol{z}(0) = P^{-1}\boldsymbol{y}_0$$

が得られる．例題 5.2 より

$$\boldsymbol{z}(t) = \exp(tP^{-1}XP)P^{-1}\boldsymbol{y}_0 = P^{-1}(\exp tX)\boldsymbol{y}_0$$

よって $\boldsymbol{y}(t) = \exp(tX)\boldsymbol{y}_0$. □

n 次正方行列 A が**安定行列**であるとは，A の全ての固有値の実部が負となるときをいう．

問題 5.6. A が安定行列のとき，微分方程式 $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x}$ の任意の解 $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}(\infty) = 0$ を満たすことを示せ．

任意の 2 次実行列 A に対して，成分を実数とする 2 次正則行列 P が存在して $P^{-1}AP$ は次のいずれかの形になる．ここで a, b は実数である：

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \ (b \neq 0), \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

任意の 3 次実行列 A に対して，3 次実正則行列 P が存在して $P^{-1}AP$ は次のいずれかの形になる．ここで a, b, c は実数である：

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

このことを用いると A が 3 次実正方行列のとき，微分方程式 $\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t) = A\boldsymbol{x}(t)$ の解 $\boldsymbol{x}(t)$ の振る舞いを調べることができる．

$\exp : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C}); X \mapsto \exp X$ を**指数写像** (exponential mapping) という．$\exp(M_n(\mathbb{C})) \subset GL(n, \mathbb{C})$ が成り立つ．次の定理によって $M_n(\mathbb{C})$ 内の曲線 $\exp tX$ が特徴付けられる．

定理 5.5. $X \in M_n(\mathbb{C})$ に対して $M_n(\mathbb{C})$ 内の曲線 $A(t)$ を $A(t) = \exp tX$ と定めると ($A(t)$ は微分可能であり)，$A(t)$ は初期条件

$$A(0) = E_n \tag{5.5}$$

を満たす微分方程式

$$\dot{A}(t) = XA(t) \tag{5.6}$$

の解になる．逆に初期条件 (5.5) を満たす微分方程式 (5.6) の解は $A(t) = \exp tX$ に限られる．

証明. $A(t) = \exp tX$ とおくと $A(0) = E_n$ となることは明らかである．$\dot{A}(t) = XA(t)$ を満たすことを示す．$X = J_n(\alpha) = \alpha E_n + N$ の形であると仮定してよい．このとき

$$A(t) = e^{\alpha t} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{t^l N^l}{l!}$$

なので

$$\begin{aligned}
\dot{A}(t) &= \alpha e^{\alpha t} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{t^l N^l}{l!} + e^{\alpha t} \sum_{l=1}^{n-1} \frac{t^{l-1} N^l}{(l-1)!} \\
&= \alpha A(t) + e^{\alpha t} N \sum_{l=0}^{n-2} \frac{t^l N^l}{l!} \\
&= \alpha A(t) + e^{\alpha t} N \sum_{l=0}^{n-1} \frac{t^l N^l}{l!} \qquad (N^n = 0) \\
&= XA(t).
\end{aligned}$$

逆に $A(t)$ が $\dot{A}(t) = XA(t),\ A(0) = E_n$ を満たすと仮定して $A(t) = \exp tX$ となることを示す．$A = (\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_1)$ と表示すると与えられた微分方程式は

$$\dot{\boldsymbol{a}}_i = X\boldsymbol{a}_i, \quad \boldsymbol{a}_i(0) = \boldsymbol{e}_i$$

と書き換えられる．定理 5.4 より $\boldsymbol{a}_i = (\exp tX)\boldsymbol{e}_i$．ゆえに

$$A = ((\exp tX)\boldsymbol{e}_1 \ \cdots (\exp tX)\boldsymbol{e}_n) = \exp tX$$

が得られる． □

系 5.6. (1) $XY = YX$ ならば $\exp(X+Y) = \exp X \exp Y$.

(2) $(\exp X)^{-1} = \exp(-X)$.

(3) $X \in M_n(\mathbb{R})$ が交代行列 $({}^tX = -X)$ ならば $\exp X \in SO(n)$．

証明. (1) $XY = YX$ より

$$(\exp tX)Y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n X^n}{n!} Y = Y \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n X^n}{n!} = Y \exp tX.$$

$A(t)=\exp tX\exp tY$ とおくと $A(0)=1$ で

$$\dot{A}(t)=X\exp tX\exp tY+(\exp tX)Y\exp tY=(X+Y)A(t).$$

よって**定理 5.5** より $A(t)=\exp t(X+Y)$.

(2) $X(-X)=(-X)X=-X^2$ なので (1) より

$$\exp X\exp(-X)=\exp(-X)\exp X=\exp(X-X)=\exp 0=1.$$

ゆえに $(\exp X)^{-1}=\exp(-X)$.

(3) $X\in M_n(\mathbb{R})$ を交代行列とすると

$$\begin{aligned}(\exp X)^{-1} &= \exp(-X) && ((2)\text{ より})\\ &= \exp {}^tX && (X\text{: 交代})\\ &= {}^t(\exp X) && (\text{定理 }5.3,(2))\end{aligned}$$

よって，$\exp X\in O(n)$．tr $X=0$ なので定理 5.3,(3) より

$$\det(\exp X)=\exp(\mathrm{tr}X)=1.$$

よって，$\exp X\in SO(n)$． □

上の系の (3) は $X\in M_n(\mathbb{R})$ が交代行列のとき，$\exp X$ が特殊直交行列になることを示している．

問題 5.7. **定理 5.5** と**定理 5.3**, (2) を用いて次を示せ．$X\in M_n(\mathbb{C})$ とする．$M_n(\mathbb{C})$ 内の曲線 $C(t)$ が初期条件 $C(0)=1$ を満たす微分方程式 $\dot{C}(t)=C(t)X$ の解ならば $C(t)=\exp tX$ となる．

微分方程式 $\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}$ は定数変化法により解ける．

命題 5.7. A を n 次正方行列，$\boldsymbol{b}$ を n 次列ベクトルとする．微分方程式 $\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}$ の解は

$$\boldsymbol{x}(t)=\exp tA\left(\int_0^t\exp(-\tau A)d\tau\boldsymbol{b}+\boldsymbol{x}(0)\right)$$

証明. 未知関数を $\boldsymbol{x}$ から $\boldsymbol{y}$ へ $\boldsymbol{x}=\exp(tA)\boldsymbol{y}$ により変換すると $\boldsymbol{y}$ に関する微分方程式 $\frac{d}{dt}\boldsymbol{y}=\exp(-tA)\boldsymbol{b}$ が得られる．これを積分して主張が得られる． □

正方行列Aの指数写像$\exp tA$を具体的に計算するためには，AのJordan標準形まで求める必要はなく，Aの固有多項式が具体的に因数分解できさえすればよい．これについては[7, §17]を参照せよ．

問題 5.8. 次の行列Aについて$\exp tA$を求めよ．

$$(1)\quad A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ -3 & -1\end{pmatrix}\qquad\qquad (2)\quad A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

問題 5.9. $a^2+b^2>0$となる実数a,bに対して，3次正方行列Aを

$$A=\begin{pmatrix}0 & -a & 0\\ a & 0 & -b\\ 0 & b & 0\end{pmatrix}$$

と定める．このとき，$\exp tA$を求めよ．

6 実対称行列とHermite行列の対角化

6.1 実対称行列の直交行列による対角化

成分を実数とする対称行列を**実対称行列**という．同様に成分を実数とする対角行列を**実対角行列**という．

2次の実対称行列Aの固有値が実数になることを示そう．Aは実数a,b,cを用いて

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}$$

と表される．Aの固有多項式$f_A(t)$は

$$f_A(t)=\begin{vmatrix}t-a & -b\\ -b & t-c\end{vmatrix}=t^2-(a+c)t+(ac-b^2)$$

二次多項式$f_A(t)$の判別式をDとすると，

$$D=(a+c)^2-4(ac-b^2)=(a+c)^2+b^2\geq 0$$

ゆえに，Aの固有値は実数である．一般に，次が成り立つことを示そう．

命題 6.1. 実対称行列Aに対して次が成り立つ．

(1) A の固有値は実数である．

(2) A の異なる固有値に対する固有ベクトルは直交する．

証明　(1) λ を A の固有値，$x \in \mathbb{C}^n$ を A の λ に対する固有ベクトルとする．$\mathbb{C}^n$ の標準エルミート内積を $\langle\ ,\ \rangle$ と表すと，$\langle Ax, x\rangle = \langle x, {}^t\overline{A}x\rangle = \langle x, Ax\rangle, Ax = \lambda x$ であるから，$\overline{\lambda}\|x\|^2 = \lambda\|x\|^2$．$x \neq 0$ より，$\|x\|^2 > 0$ だから $\lambda = \overline{\lambda}$．ゆえに λ は実数である．

(2) λ, μ を A の互いに異なる固有値とする．前命題より λ, μ は実数である．λ, μ に対する A の固有ベクトルをそれぞれ $x, y \in \mathbb{R}^n$ とすると

$$\lambda\langle x, y\rangle = \langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle = \mu\langle x, y\rangle.$$

$\lambda \neq \mu$ であるから，$\langle x, y\rangle = 0$．　□

定義 6.2. V を内積 $\langle\ ,\ \rangle$ をもつ有限次元ベクトル空間とする．$f \in \mathrm{End}(V)$ が**対称変換**であるとは，

$$\langle f(u), v\rangle = \langle u, f(v)\rangle \qquad (u, v \in V)$$

となるときを言う．

n 次実対称行列 A の定める線形変換 $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ は対称変換である．

命題 6.3. V を内積 $\langle\ ,\ \rangle$ をもつ有限次元ベクトル空間とする．$f \in \mathrm{End}(V)$ に対して，次の (1), (2), (3) は同値である．

(1) f は対称変換である．

(2) V のある正規直交基底に関する f の表現行列は対称行列である．

(3) V の任意の正規直交基底に関する f の表現行列は対称行列である．

証明　(1) $\Rightarrow$ (3)：f を対称変換とする．$\{u_1, \cdots, u_n\}$ を V の任意の正規直交基底とする．f の $\{u_1, \cdots, u_n\}$ に関する表現行列を $A = (a_{ij})$ とすると，

$$f(u_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} u_i$$

f は対称だから，

$$a_{kj} = \langle f(u_j), u_k\rangle = \langle u_j, f(u_k)\rangle = a_{jk}$$

ゆえに A は対称行列である．

(3) $\Rightarrow$ (2) は明らかである．

(2) $\Rightarrow$ (1)： V のある正規直交基底 $\{u_1, \cdots, u_n\}$ に関する f の表現行列 $A = (a_{ij})$ が対称であるとする．任意の $u = \sum x_i u_i, v = \sum y_i u_\in V$ に対して，

$$\begin{aligned}
\langle f(u), v\rangle &= \sum x_i y_j \langle f(u_i), u_j\rangle = \sum x_i y_j a_{ji}, \\
\langle u, f(v)\rangle &= \sum x_i y_j \langle u_i, f(u_j)\rangle = \sum x_i y_j a_{ij} = \sum x_i y_j a_{ji} \quad (a_{ji} = a_{ij}) \\
&= \langle f(u), v\rangle
\end{aligned}$$

よって，f は対称変換である．$\square$

系 6.4. V を内積 $\langle\ ,\ \rangle$ をもつ有限次元実ベクトル空間とする．$f \in \mathrm{End}(V)$ を対称変換とする．

(1) f の固有値は実数である．

(2) f の異なる固有値に対する固有ベクトルは直交する．

定義 6.5. (1) A を n 次実対称行列，λ を A の固有値とする．次で定義される $\mathbb{R}^n$ の部分空間 $V(\lambda)$ を A の固有値 λ に対する**固有空間**という：

$$V(\lambda) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = \lambda x\}$$

(2) V を内積 $\langle\ ,\ \rangle$ をもつ有限次元ベクトル空間とする．$f \in \mathrm{End}(V)$ を対称変換，λ を f の固有値とする．次で定義される V の部分空間 $V(\lambda)$ を f の固有値 λ に対する**固有空間**という：

$$V(\lambda) = \{x \in V \mid f(x) = \lambda x\}$$

定理 6.6. (1) V を内積 $\langle\ ,\ \rangle$ をもつ有限次元ベクトル空間，$f \in \mathrm{End}(V)$ を対称変換とする．$\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ を f の互いに異なる固有値全部とすると，

$$V = V(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_k) \quad (\text{直交直和})$$

(2) 任意の実対称行列 $A \in M_n(\mathbb{R})$ に対して，直交行列 $P \in O(n)$ が存在して，$P^{-1}AP$ は対角行列になる．

証明　(1) 系 6.4, (1) より，$\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ は実数で，系 6.4, (2) より和空間 $V(\lambda_1) + \cdots + V(\lambda_k)$ は直交直和になる．V の部分空間 W を

$$W = (V(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_k))^{\perp}$$

と定めると，

$$V = (V(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_k)) \oplus W \quad (\text{直交直和})$$

任意の $w \in W, v_i \in V_i$ $(1 \leq i \leq k)$ に対し，

$$\begin{aligned}\langle f(w), v_1 + \cdots + v_k\rangle &= \langle w, f(v_1) + \cdots + f(v_k)\rangle = \langle w, \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k\rangle \\ &= \lambda_1\langle w, v_1\rangle + \cdots + \lambda_k\langle w, v_k\rangle = 0\end{aligned}$$

となるから，$f(W) \subset W$．よって，$f_{|W} \in \mathrm{End}(W)$ は W の対称変換になる．仮に，$W \neq \{0\}$ とすると，$f_{|W}$ の固有値，固有ベクトルは f の固有値，固有ベクトルになり，W のおき方に矛盾が起こる．ゆえに，$W = \{0\}$ となり，主張が示された．

(2) A の互いに異なる固有値全部を $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ とする．対称変換 $A \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ に (1) を適用して，

$$\mathbb{R}^n = V(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_k) \quad (\text{直交直和})$$

$V(\lambda_j)$ の正規直交基底 $\{u_{j1}, \cdots, u_{jl_j}\}$ を並べて，直交行列 $P \in O(n)$ を

$$P = (u_{11}, \cdots, u_{1l_1}, \cdots, u_{k1}, \cdots, u_{kl_k})$$

と定めると，

$$\begin{aligned}AP &= (Au_{11}, \cdots, Au_{1l_1}, \cdots, Au_{k1}, \cdots, Au_{kl_k}) \\ &= (\lambda_1 u_{11}, \cdots, \lambda_1 u_{1l_1}, \cdots, \lambda_k u_{k1}, \cdots, \lambda_k u_{kl_k}) \\ &= P\begin{pmatrix}\lambda_1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && \lambda_1 &&&& \\ &&& \ddots &&& \\ &&&& \lambda_k && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& \lambda_k\end{pmatrix}\end{aligned}$$

両辺に P^{-1} をかけて主張が得られる．　□

問題 6.1. 任意の実対称行列は特殊直交行列により対角化することができる．このことを示せ．

問題 6.2. (1) 行列の積

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

を計算せよ．

(2) n 次特殊直交行列 $SO(n)$ は $\mathrm{Sym}(n)$ に自然に作用する: その作用を ρ と表すと

$$\rho(g)X = gX^t g \qquad (g \in SO(n), X \in \mathrm{Sym}(n))$$

任意の $X \in \mathrm{Sym}(n)$ は，ある $g \in SO(n)$ で対角化できる．そこで，$\mathrm{Sym}(n)$ の部分空間 S を

$$S = \{\mathrm{diag}\{a_1, \cdots, a_n\} \mid a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}^n$$

と定める．このとき，$SO(n)$ の任意の軌道は S と交わる．S の部分集合 S_0 を

$$S_0 = \{\mathrm{diag}\{a_1, \cdots, a_n\} \mid a_1 \leq \cdots \leq a_n\}$$

と定める．$SO(n)\backslash\mathrm{Sym}(n)$ で軌道全体の空間 (軌道空間) を表すと，

$$S_0 \to SO(n)\backslash\mathrm{Sym}(n); H \mapsto \rho(SO(n))H$$

は全単射となることを示せ．

定理 6.7. $A_1, \cdots, A_t$ を互いに可換 ($A_iA_j = A_jA_i$) な n 次実対称行列とする．ある n 次直交行列 T が存在して，$T^{-1}A_1T, \cdots, T^{-1}A_tT$ が全て対角行列となる．

証明 λ を A_i の固有値，$V(\lambda, A_i)$ を A_i の固有値 λ に対する固有空間とする．$v \in V(\lambda, A_i)$ に対し，$A_jv \in V(\lambda, A_i)$ を示す．実際，

$$A_i(A_jv) = A_j(A_iv) = A_j(\lambda v) = \lambda A_jv$$

よって，$A_jv \in V(\lambda, A_i)$．ゆえに，$A_{j|V(\lambda,A_i)}$ は $V(\lambda, A_i)$ の対称変換を引き起こす．

以下，一般的に記述しようとすると記号が煩雑になるので，$t=1$ とし，A_1 の互いに異なる固有値全部を $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$，$A_2$ の互いに異なる固有値全部を $\mu_1, \cdots, \mu_q$ とする．定理 6.6, (1) より

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^n &= \bigoplus_{i=1}^{p} V(\lambda_i, A_1) \quad (\text{直交直和}) \\ &= \bigoplus_{j=1}^{q} V(\mu_j, A_2) \quad (\text{直交直和})\end{aligned}$$

先に述べたことから

$$V(\lambda_i, A_1) = \bigoplus_{j=1}^{q} V(\lambda_i, A_1) \cap V(\mu_j, A_2) \quad (\text{直交直和})$$

が成り立ち，

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i,j} V(\lambda_i, A_1) \cap V(\mu_j, A_2) \quad (\text{直交直和})$$

が得られる．そこで，$V(\lambda_i, A_1) \cap V(\mu_j, A_2)$ の正規直交基底を並べて，$\mathbb{R}^n$ の正規直交基底 $\{u_1, \cdots, u_n\}$ を作ると，$\{u_1, \cdots, u_n\}$ に関する各 A_i の表現行列はすべて対角行列になる．よって $T = (u_1, \cdots, u_n) \in O(n)$ とおくと主張が成り立つ． □

6.2　Hermite 行列のユニタリー行列による対角化

複素数を成分とする n 次正方行列 A が **Hermite 行列**であるとは，$A^* = A$ となるときをいう．ただし，$A^* = \overline{{}^tA}$ とおいた．2 次 Hermite 行列 A の固有値は実数になることを示そう．A は実数 a, c と複素数 b を用いて

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & c \end{pmatrix}$$

と表される．A の固有多項式 $f_A(t)$ は

$$f_A(t) = \begin{vmatrix} t-a & -b \\ -\bar{b} & t-c \end{vmatrix} = t^2 - (a+c)t + (ac - |b|^2)$$

$f_A(t)$ は実数を係数とする二次多項式であり，その判別式を D とすると，

$$D = (a+c)^2 - 4(ac - |b|^2) = (a-c)^2 + 4|b|^2 \geq 0$$

よって，A の固有値は実数である．一般に，次が成り立つことを示そう．

命題 6.8. n 次 Hermite 行列 A に対し，次が成り立つ．

(1) A の固有値は実数である．

(2) A の異なる固有値に対する固有ベクトルは直交する．

証明 (1) λ を A の固有値，$x \in \mathbb{C}^n$ を A の λ に対する固有ベクトルとする．$\mathbb{C}^n$ の標準 Hermite 内積を $\langle\ ,\ \rangle$ で表すと，

$$\begin{aligned}\overline{\lambda}\|x\|^2 &= \overline{\lambda}\langle x, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \langle Ax, x\rangle = \langle x, A^*x\rangle = \langle x, Ax\rangle \quad (A\text{: Hermite}) \\ &= \langle x, \lambda x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle = \lambda\|x\|^2\end{aligned}$$

$\|x\|^2 > 0$ より $\lambda = \overline{\lambda}$．ゆえに λ は実数である．

(2) λ, μ を A の互いに異なる固有値とする．前命題より λ, μ は実数である．λ, μ に対する A の固有ベクトルをそれぞれ $x, y \in \mathbb{C}^n$ とすると

$$\lambda\langle x, y\rangle = \langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle = \mu\langle x, y\rangle.$$

$\lambda \neq \mu$ であるから，$\langle x, y\rangle = 0$． $\square$

定義 6.9. V を Hermite 内積 $\langle\ ,\ \rangle$ をもつ複素ベクトル空間とする．V 上の線形変換 f が **Hermite 変換**であるとは，任意の $u, v \in V$ に対して

$$\langle f(u), v\rangle = \langle u, f(v)\rangle$$

となるときをいう．

n 次 Hermite 行列 A の定める線形変換 $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ は Hermite 変換である．

命題 6.10. V を Hermite 内積 $\langle\ ,\ \rangle$ をもつ有限次元複素ベクトル空間とする．$f \in \mathrm{End}(V)$ に対して，次の (1), (2), (3) は同値である．

(1) f は Hermite 変換である．

(2) V のある正規直交基底に関する f の表現行列は Hermite 行列である．

(3) V の任意の正規直交基底に関する f の表現行列は Hermite 行列である．

証明　(1) $\Rightarrow$ (3) f を Hermite 変換とする．$\{u_1, \cdots, u_n\}$ を V の任意の正規直交基底とする．f の $\{u_1, \cdots, u_n\}$ に関する表現行列を $A = (a_{ij})$ とすると，

$$f(u_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} u_i$$

f は Hermite 変換だから，

$$\overline{a}_{kj} = \langle f(u_j), u_k \rangle = \langle u_j, f(u_k) \rangle = a_{jk}$$

ゆえに A は Hermite 行列である．

(3) $\Rightarrow$ (2) は明らかである．

(2) $\Rightarrow$ (1)：V のある正規直交基底 $\{u_1, \cdots, u_n\}$ に関する f の表現行列 $A = (a_{ij})$ が Hermite であるとする．任意の $u = \sum z_i u_i, v = \sum w_i u_i \in V$ に対し，

$$\begin{aligned}
\langle f(u), v \rangle &= \sum \overline{z}_i w_j \langle f(u_i), u_j \rangle = \sum \overline{z}_i w_j \overline{a}_{ji}, \\
\langle u, f(v) \rangle &= \sum \overline{z}_i w_j \langle u_i, f(u_j) \rangle = \sum \overline{z}_i w_j a_{ij} = \sum \overline{z}_i w_j \overline{a}_{ji}
\end{aligned}$$

ゆえに f は Hermite 変換である．　□

系 6.11. V を Hermite 内積 $\langle\ ,\ \rangle$ をもつ有限次元複素ベクトル空間とする．$f \in \mathrm{End}(V)$ を Hermite 変換とする．

(1) f の固有値は実数である．

(2) f の異なる固有値に対する固有ベクトルは直交する．

定義 6.12. (1) A を n 次 Hermite 行列，λ を A の固有値とする．次で定義される $\mathbb{C}^n$ の複素部分空間 $V(\lambda)$ を A の固有値 λ に対する**固有空間**という：

$$V(\lambda) = \{x \in \mathbb{C}^n \mid Ax = \lambda x\}$$

(2) V を Hermite 内積 $\langle\ ,\ \rangle$ をもつ有限次元複素ベクトル空間とする．$f \in \mathrm{End}(V)$ を Hermite 変換，λ を f の固有値とする．次で定義される V の複素部分空間 $V(\lambda)$ を f の固有値 λ に対する**固有空間**という：

$$V(\lambda) = \{x \in V \mid f(x) = \lambda x\}$$

複素数を成分とする n 次正方行列 U が**ユニタリー行列**であるとは，U は正則行列であり，$U^* = U^{-1}$ となるときをいう．

命題 6.13. 複素数を成分とする n 次正方行列 $U = (u_1, \cdots, u_n)$ に対して次の条件は同値になる：

(1) U はユニタリー行列である．

(2) $U^*U = E_n$

(3) $UU^* = E_n$

(4) $\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}$

証明 (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) は明らかである．$U = (u_1, \cdots, u_n) \in M_n(\mathbb{C})$ に対して

$$U^*U = \begin{pmatrix} {}^t\overline{u_1} \\ \vdots \\ {}^t\overline{u_n} \end{pmatrix} (u_1, \cdots, u_n) = ({}^t\overline{u_i} u_j)_{1 \leq i,j \leq n} = (\langle u_i, u_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq n}$$

よって，(2) $\Leftrightarrow$ (4) が成り立つ． □

問題 6.3. 次を示せ．

(1) n 次ユニタリー行列の全体 $U(n)$ は行列の積に関して群になる．

(2) 任意の $T \in U(n)$ に対して，$|\mathrm{det} T| = 1$．

上の問中の $U(n)$ を n **次ユニタリー群**という：

$$U(n) = \{T \in M(n; \mathbb{C}) \mid T^* = T^{-1}\}$$

問題 6.4. 任意の複素正則行列 P は，ユニタリー行列 T と正則な上三角行列 U の積として $P = TU$ と表されることを示せ．

問題 6.5. 次を示せ．

(1) $SU(n) = \{T \in U(n) \mid \det(T) = 1\}$ とおくと，$SU(n)$ は行列の積に関して群になる．

(2)

$$\begin{aligned} SU(2) &= \left\{ \begin{pmatrix} z & -\overline{w} \\ w & \overline{z} \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} z, w \in \mathbb{C}, \\ |z|^2 + |w|^2 = 1 \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} z & -\overline{w} \\ w & \overline{z} \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} z = \cos\theta_1 + i\cos\theta_2 \sin\theta_1, \\ w = \cos\theta_3 \sin\theta_2 \sin\theta_1 + i \sin\theta_3 \sin\theta_2 \sin\theta_1, \\ 0 \leq \theta_1 \leq \pi, 0 \leq \theta_2 \leq \pi, \\ 0 \leq \theta_3 \leq 2\pi \end{array} \right\} \end{aligned}$$

上の問中の $SU(n)$ を n 次特殊ユニタリー群といい，その元を n 次特殊ユニタリー行列という．

定理 6.14. (1) V を Hermite 内積 $\langle\ ,\ \rangle$ をもつ複素 n 次元ベクトル空間とする．Hermite 変換 $f \in \mathrm{End}(V)$ の互いに異なる固有値全部を $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ とすると，

$$V = V(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_k) \quad (\text{直交直和})$$

(2) 任意の Hermite 行列はユニタリー行列により対角化することができる：任意の n 次 Hermite 行列 A に対して，n 次ユニタリー行列 U が存在して，$U^{-1}AU$ は対角行列になる．

証明 (1) 系 6.11, (1) より，$\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ は実数で，系 6.11, (2) より和空間 $V(\lambda_1) + \cdots + V(\lambda_k)$ は直交直和になる．V の部分空間 W を

$$W = (V(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_k))^{\perp}$$

と定めると，

$$V = (V(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_k)) \oplus W \quad (\text{直交直和})$$

任意の $w \in W, v_i \in V_i$ $(1 \leq i \leq k)$ に対し，

$$\begin{aligned}\langle f(w), v_1 + \cdots + v_k \rangle &= \langle w, f(v_1) + \cdots + f(v_k) \rangle = \langle w, \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \rangle \\ &= \lambda_1 \langle w, v_1 \rangle + \cdots + \lambda_k \langle w, v_k \rangle = 0\end{aligned}$$

となるから，$f(W) \subset W$．よって，$f_{|W} \in \mathrm{End}(W)$ は W の Hermite 変換になる．仮に，$W \neq \{0\}$ とすると，$f_{|W}$ の固有値，固有ベクトルは f の固有値，固有ベクトルになり，W のおき方に矛盾が起こる．ゆえに，$W = \{0\}$ となり，主張が示された．

(2) A の互いに異なる固有値全部を $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ とする．Hermite 変換 $A \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ に (1) を適用して，

$$\mathbb{C}^n = V(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_k) \quad (\text{直交直和})$$

$V(\lambda_j)$ の正規直交基底 $\{u_{j1}, \cdots, u_{jl_j}\}$ を並べて，ユニタリー行列 $P \in U(n)$ を

$$P = (u_{11}, \cdots, u_{1l_1}, \cdots, u_{k1}, \cdots, u_{kl_k})$$

と定めると，

$$\begin{aligned}AP &= (Au_{11},\cdots,Au_{1l_1},\cdots,Au_{k1},\cdots,Au_{kl_k})\\ &= (\lambda_1 u_{11},\cdots,\lambda_1 u_{1l_1},\cdots,\lambda_k u_{k1},\cdots,\lambda_k u_{kl_k})\\ &= P\begin{pmatrix}\lambda_1 &&&&&\\ &\ddots&&&&\\ &&\lambda_1&&&\\ &&&\ddots&&\\ &&&&\lambda_k&\\ &&&&&\ddots&\\ &&&&&&\lambda_k\end{pmatrix}\end{aligned}$$

両辺に P^{-1} をかけて主張が得られる． □

定理 6.7 の証明と同様にして次が得られる．

定理 6.15. $A_1,\cdots,A_t$ を互いに可換な n 次 Hermite 行列とする．ある n 次ユニタリー行列 U が存在して，$U^{-1}A_1U,\cdots,U^{-1}A_tU$ が全て対角行列になる．

定義 6.16. 複素数を成分とする n 次正方行列 A が**正規**であるとは，$AA^* = A^*A$ となるときをいう．

命題 6.17. 可換な二つの Hermite 行列 A_1,A_2 に対して $A = A_1 + iA_2$ とおくと，A は正規行列である．逆に，任意の正規行列 A に対して，可換な二つの Hermite 行列 A_1,A_2 が存在して，$A = A_1 + iA_2$ となる．

証明 可換な二つの Hermite 行列 A_1,A_2 に対して $A = A_1 + iA_2$ とおく．このとき，$A^* = A_1^* - iA_2^* = A_1 - iA_2$．$A_1A_2 = A_2A_1$ を用いて，

$$AA^* = A_1^2 + A_2^2 = A^*A$$

よって，A は正規行列である．

逆に正規行列 A に対して，

$$A_1 = \frac{1}{2}(A + A^*), \quad A_2 = \frac{1}{2i}(A - A^*)$$

とおくと，A_1,A_2 は正規行列で $A = A_1 + iA_2$ となる．さらに

$$A_1A_2 = \frac{1}{4i}(A^2 - (A^*)^2) = A_2A_1$$

となるので，A_1 と A_2 は可換である． □

定理 6.18. 任意の正規行列 A に対して，ユニタリー行列 U が存在して，$U^{-1}AU$ は対角行列になる．逆に $A \in M_n(\mathbb{C})$ がユニタリー行列で対角化できたとすると，A は正規行列になる．

証明　A を正規行列とする．命題 6.17 より可換な二つの Hermite 行列 A_1, A_2 が存在して，$A = A_1 + iA_2$ と表される．定理 6.15 より，ユニタリー行列 U が存在して，$D_1 := U^{-1}A_1U, D_2 := U^{-1}A_2U$ は共に対角行列になる．このとき，

$$U^{-1}AU = (U^{-1}A_1U) + i(U^{-1}A_2U) = D_1 + iD_2$$

となるので，$U^{-1}AU$ は対角行列になる．

$A \in M_n(\mathbb{C})$ に対してユニタリー行列 U が存在して，$D := U^{-1}AU$ が対角行列になったとする．このとき，$A = UDU^*, A^* = U\overline{D}U^*$ だから

$$AA^* = UD\overline{D}U^* = U\overline{D}DU^* = A^*A$$

よって，A は正規行列である．□

7　実交代行列の特殊直交行列による標準形

成分を実数とする n 次交代行列の全体を $A(n)$ と表す．

問題 7.1. $A(n)$ は行列の和と実数倍に関して $\frac{n(n-1)}{2}$ 次元ベクトル空間になることを示せ．

$\mathbb{C}^n$ の標準 Hermite 内積を $\langle\ ,\ \rangle$ と表す．

まず，$n = 2$ の場合を考えよう．$X \in A(2)$ は $a \in \mathbb{R}$ を用いて，

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

と表される．固有多項式は

$$f_X(t) = |tE_2 - A| = \begin{vmatrix} t & a \\ -a & t \end{vmatrix} = t^2 + a^2$$

固有値は $\pm ia$．以下，$a \neq 0$ と仮定する．固有値 $\pm ia$ に対する固有空間を $V(\pm ia)$ と表すと，

$$V(ia) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad V(-ia) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

このとき，

$$\langle V(ai), V(-ia)\rangle = \{0\}, \quad \overline{V(ai)} = \{\overline{u} \mid u \in V(ai)\} = V(-ia),$$
$$\mathbb{C}^2 = V(ai) \oplus V(-ia) \quad (\text{直交直和})$$

が成り立つ．このことは以下のように一般化される．

命題 7.1. $X \in A(n)$ に対して次が成り立つ．

(1) n が奇数ならば，X は固有値 0 をもつ．

(2) X の固有値 $\in \mathbb{C}$ は純虚数である．

(3) 純虚数 ia $(a \in \mathbb{R})$ が X の固有値ならば，$-ia$ も X の固有値であり，$V(ia) \subset \mathbb{C}^n$ で X の固有値 ia に対する固有空間を表すと，$V(ia) \to V(-ia); u \mapsto \overline{u}$ は実線形同型写像になる．

(4) ia と ib が X の固有値で $a \neq b$ ならば，$\langle V(ia), V(ib)\rangle = \{0\}$．

証明. (1) $n = 2m+1$ とおくと，行列式の転置不変性から，

$$|X| = |{}^tX| = |-X| = (-1)^{2m+1}|X| = -|X|$$

よって，$|X| = 0$ となる．ゆえに X は固有値 0 をもつ．
(2) $u \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ を X の固有値 $\alpha \in \mathbb{C}$ に対する固有ベクトルとすると

$$\overline{\alpha}\|u\|^2 = \langle Xu, u\rangle = \langle u, X^*u\rangle = -\langle u, Xu\rangle = -\alpha\|u\|^2$$

ここで，$u \neq 0$ より，$\|u\|^2 > 0$．よって，$\overline{\alpha} = -\alpha$ が得られる．ゆえに X の固有値は純虚数である．
(3) $u \in V(ia)$ とすると，

$$X\overline{u} = \overline{Xu} = \overline{iau} = -ia\overline{u}$$

ゆえに，$\overline{u} \in V(-ia)$．逆に，$v \in V(-ia)$ ならば $\overline{v} \in V(ia)$ であり，これらの実線形写像は互いに逆写像になる．
(4) $u \in V(ia), b \in V(ib)$ とすると，

$$\begin{aligned} -ia\langle u, v\rangle &= \langle iau, v\rangle = \langle Xu, v\rangle = \langle u, X^*v\rangle \\ &= -\langle u, Xv\rangle = -\langle u, ibv\rangle = -ib\langle u, v\rangle \end{aligned}$$

$a \neq b$ より，$\langle u, v\rangle = 0$．　□

$X \in A(n), g \in O(n)$ に対して，${}^t gXg \in A(n)$ である．

定理 7.2. 任意の $X \in A(n)$ に対して，$g \in SO(n)$ が存在して，

$$
{}^t gXg = \begin{pmatrix} 0 & -\theta_1 & & & & \\ \theta_1 & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & -\theta_m & \\ & & & \theta_m & 0 & \\ & & & & & (0) \end{pmatrix}
$$

最後の (0) は n が奇数のときのみ現われる．

証明. X の 0 以外の固有値全部を $\{\pm i\theta_j \mid 1 \leq j \leq k\}$ とする．$\mathbb{C}^n$ の複素部分空間 $V_\pm(\theta_j)$ を

$$
V_\pm(\theta_j) = \{v \in \mathbb{C}^n \mid Xv = \pm i\theta_j v\}
$$

と定める．また，$\mathbb{R}^n$ の実部分空間 $W(0)$ を

$$
W(0) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid Xv = 0\} (= \{0\} \text{ かもしれない})
$$

と定める．X は正規行列だからユニタリー行列で対角化可能である．よって，

$$
\mathbb{C}^n = \sum_{j=1}^{k} (V_+(\theta_j) \oplus V_-(\theta_j)) \oplus V(0) \quad (\text{直交直和})
$$

ただし，$V(0) = W(0) \oplus iW(0) = \{v \in \mathbb{C}^n \mid Xv = 0\}$．$\mathbb{R}^n$ の部分空間 $W(\theta_j)$ を

$$
W(\theta_j) = (V_+(\theta_j) \oplus V_-(\theta_j)) \cap \mathbb{R}^n = \{u + \overline{u} \mid u \in V_+(\theta_j)\}
$$

と定めると，$V_+(\theta_j) \mapsto W(\theta_j); u \mapsto u + \overline{u}$ は実線形同型写像だから，

$$
\dim_{\mathbb{R}} W(\theta_j) = \dim_{\mathbb{R}} V_+(\theta_j) = 2 \dim_{\mathbb{C}} V_+(\theta_j) = \dim_{\mathbb{C}} V_+(\theta_j) + \dim_{\mathbb{C}} V_-(\theta_j)
$$

また，$\dim_{\mathbb{R}} W(0) = \dim_{\mathbb{C}} V(0)$．これらをすべて加え合わせると，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{k} \dim_{\mathbb{R}} W(\theta_j) + \dim_{\mathbb{R}} W(0) \\
&= \sum_{j=1}^{k} (\dim_{\mathbb{C}} V_+(\theta_j) + \dim_{\mathbb{C}} V_-(\theta_j)) + \dim_{\mathbb{C}} V(0) \\
&= \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n = n
\end{aligned}
$$

よって，

$$\mathbb{R}^n = \sum_{j=1}^{k} W(\theta_j) \oplus W(0) \quad (\text{直交直和})$$

$u \in V_+(\theta_j)$ に対し，

$$X(u+\overline{u}) = Xu + \overline{Xu} = i\theta_j u - i\theta_j \overline{u} = \theta_j(iu - i\overline{u})$$

となるから，$W(\theta_j)$ は X-不変であり，$X(iu - i\overline{u}) = -\theta_j(u+\overline{u})$．これを利用して，$X|_{W(\theta_j)}$ の表現行列を求める．そのために $\{u_1, \cdots, u_l\}$ を複素部分空間 $V_+(\theta_j)$ の正規直交基底とする．このとき，$\{u_1, iu_1, \cdots, u_l, iu_l\}$ は $V_+(\theta_j)$ を実部分空間とみたものの基底である．このことと簡単な計算から

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(u_1+\overline{u}_1), \frac{i}{\sqrt{2}}(u_1-\overline{u}_1), \cdots, \frac{1}{\sqrt{2}}(u_l+\overline{u}_l), \frac{i}{\sqrt{2}}(u_l-\overline{u}_l) \right\}$$

は $W(\theta_j)$ の正規直交基底になることがわかる．この正規直交基底に関する $X_{|W(\theta_j)}$ の表現行列は

$$\begin{pmatrix} 0 & -\theta_j & & & \\ \theta_j & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & -\theta_j \\ & & & \theta_j & 0 \end{pmatrix}$$

となる．これらの正規直交基底を並べて $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底 $\{g_1, \cdots, g_n\}$ を作り，$g = (g_1, \cdots, g_n)$ とおくと，$g \in O(n)$ であり，${}^t gXg$ は望む形になる．もし，$g \notin SO(n)$ ならば，関係式

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix}$$

を利用して g を $SO(n)$ の元に取り換えることができる． □

8　特殊直交行列の標準形

この節では n 次特殊直交行列の特殊直交行列による標準形について考察する．

まず，$n=2$ の場合について考えよう．

$$g=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\in SO(2)$$

とする．固有多項式は

$$f_g(t)=|tE_2-g|=\begin{vmatrix}t-\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & t-\cos\theta\end{vmatrix}=(t-\cos\theta)^2+\sin^2\theta$$

固有値は $e^{\pm i\theta}$．以下，$\theta\notin\pi\mathbb{Z}$ と仮定する．固有空間は

$$V(e^{i\theta})=\mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix},\quad V(e^{-i\theta})=\mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$$

よって，

$$\mathbb{C}^2=V(e^{i\theta})\oplus V(e^{-i\theta})\quad(\text{直交直和}),\quad \overline{V(e^{i\theta})}=V(e^{-i\theta})$$

命題 8.1. $g\in SO(n)$ に対して次が成り立つ．

(1) n が奇数のとき，g は固有値 1 をもつ．

(2) $\alpha\in\mathbb{C}$ が g の固有値ならば，$|\alpha|=1$．

(3) $\alpha\in\mathbb{C}$ が X の固有値ならば，$\overline{\alpha}$ も X の固有値であり，それぞれに対する固有空間を $V(\alpha)$ と $V(\overline{\alpha})$ で表すと，$V(\alpha)\to V(\overline{\alpha}); u\mapsto\overline{u}$ は<u>実</u>線形同型写像になる．

(4) $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ が g の互いに異なる固有値ならば，それらの固有空間は $\mathbb{C}^n$ 内で直交する．

証明. (1) $n=2m+1$ とおく．$|g|=1$ より，

$$\begin{aligned}|g-E_{2m+1}|&=|g-E_{2m+1}||{}^tg|=|(g-E_{2m+1}){}^tg|=|g{}^tg-{}^tg|\\&=|E_{2m+1}-{}^tg|=|-({}^tg-E_{2m+1})|\\&=(-1)^{2m+1}|{}^tg-E_{2m+1}|=-|g-E_{2m+1}|\end{aligned}$$

よって，$|g-E_{2m+1}|=0$．ゆえに，g は固有値 1 をもつ．

(2) $u\in\mathbb{C}^n-\{0\}$ を g の固有値 α に対する固有ベクトルとすると，

$$0<\|u\|^2=\langle gu,gu\rangle=\langle\alpha u,\alpha u\rangle=|\alpha|^2\|u\|^2$$

よって，$|\alpha| = 1$.

(3) $u \in V(\alpha)$ とすると，

$$g\bar{u} = \overline{gu} = \overline{\alpha u} = \bar{\alpha}\,\bar{u}$$

ゆえに，$\bar{u} \in V(\bar{\alpha})$．逆に，$v \in V(\bar{\alpha})$ ならば，$\bar{v} \in V(\alpha)$ であり，これらの実線形写像は互いに逆写像になる．

(4) $u, v \in \mathbb{C}$ をそれぞれ g の固有値 α, β に対する固有ベクトルとすると，

$$\langle u, v\rangle = \langle gu, gv\rangle = \bar{\alpha}\beta\langle u, v\rangle$$

$\alpha \neq \beta$ より $\bar{\alpha}\beta \neq 1$．よって，$\langle u, v\rangle = 0$. □

定理 8.2. 任意の $g \in SO(n)$ に対して，$h \in SO(n)$ が存在して，

$$^t hgh = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & & & & \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \cos\theta_m & -\sin\theta_m & \\ & & & \sin\theta_m & \cos\theta_m & \\ & & & & & (1) \end{pmatrix}$$

最後の (1) は n が奇数のときのみ現われる．

証明. g の 1 以外の固有値全部を $\{\alpha_1, \bar{\alpha}_1, \cdots, \alpha_k, \bar{\alpha}_k\}$ とし，$\alpha \in \mathbb{C}$ に対して，$\mathbb{C}^n$ の複素部分空間 $V(\alpha)$ を

$$V(\alpha) = \{v \in \mathbb{C}^n \mid gv = \alpha v\}$$

と定めると，

$$\mathbb{C}^n = \sum_{j=1}^{k}(V(\alpha_j) \oplus V(\bar{\alpha}_j)) \oplus V(1) \quad (\text{直交直和})$$

$\mathbb{R}^n$ の実部分空間 $W(\alpha_j), W(1)$ を

$$W(\alpha_j) = \{u + \bar{u} \mid u \in V(\alpha_j)\}, \quad W(1) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid gv = v\}$$

と定めると，

$$\dim_{\mathbb{R}} W(\alpha) = \dim_{\mathbb{R}} V(\alpha_j) = 2\dim_{\mathbb{C}} V(\alpha_j) = \dim_{\mathbb{C}} V(\alpha_j) + \dim_{\mathbb{C}} V(\bar{\alpha}_j),$$
$$\dim_{\mathbb{R}} W(1) = \dim_{\mathbb{C}} V(1)$$

これらをすべて加え合わせると

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k} \dim_{\mathbb{R}} W(\alpha_j) + \dim_{\mathbb{R}} W(1) &= \sum_{j=1}^{k} (\dim_{\mathbb{C}} V(\alpha_j) + \dim_{\mathbb{C}} V(\overline{\alpha}_j)) + \dim_{\mathbb{C}} V(1) \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n = n = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

よって

$$\mathbb{R}^n = \sum_{j=1}^{k} W(\alpha_j) \oplus W(0) \quad (\text{直交直和})$$

複素部分空間 $V(\alpha_j)$ の正規直交基底を $\{u_1, \cdots, u_l\}$ とすると，

$$\{u_1, iu_1, \cdots, u_l, iu_l\}$$

は $V(\alpha_j)$ を実部分空間と見たものの基底となる．

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(u_1 + \overline{u}_1), \frac{i}{\sqrt{2}}(u_1 - \overline{u}_1), \cdots, \frac{1}{\sqrt{2}}(u_l + \overline{u}_l), \frac{i}{\sqrt{2}}(u_l - \overline{u}_l) \right\}$$

は $W(\alpha_j)$ の正規直交基底である．$\alpha_j = e^{i\theta_j}$ と表示すると，

$$\begin{aligned} g(\frac{1}{\sqrt{2}}(u_p + \overline{u}_p)) &= \cos\theta_j(\frac{1}{\sqrt{2}}(u_p + \overline{u}_p)) + \sin\theta_j(\frac{i}{\sqrt{2}}(u_1 - \overline{u}_1)), \\ g(\frac{i}{\sqrt{2}}(u_p - \overline{u}_p)) &= -\sin\theta_j(\frac{1}{\sqrt{2}}(u_p + \overline{u}_p)) + \cos\theta_j(\frac{i}{\sqrt{2}}(u_1 - \overline{u}_1)) \end{aligned}$$

よって，$g_{|W(\alpha_j)}$ の上の正規直交基底に関する表現行列は

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_j & -\sin\theta_j & & & \\ \sin\theta_j & \cos\theta_j & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \cos\theta_j & -\sin\theta_j \\ & & & \sin\theta_j & \cos\theta_j \end{pmatrix}$$

となる．$W(\alpha_j)(1 \leq j \leq k), W(0)$ のこれらの正規直交基底を並べて $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底 $\{h_1, \cdots, h_n\}$ を作り，$h = (h_1, \cdots, h_n) \in O(n)$ とおくと ${}^t hgh$ が求める形になる．$h \in O(n) - SO(n)$ のときは関係式

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を用いて，h を $h \in SO(n)$ と取り直せる．　$\square$

系 8.3. $\exp(A(n)) = SO(n)$.

証明. [6]系 5.6 より $\exp(A(n)) \subset SO(n)$．定理 4.1 より，任意の $g \in SO(n)$ に対して，$h \in SO(n)$ が存在して，

$$g = h \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & & & & \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \cos\theta_m & -\sin\theta_m & \\ & & & \sin\theta_m & \cos\theta_m & \\ & & & & & (1) \end{pmatrix} {}^t h$$

ここで，

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -\theta_1 & & & & \\ \theta_1 & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & -\theta_m & \\ & & & \theta_m & 0 & \\ & & & & & (0) \end{pmatrix}$$

とおくと，$X \in A(n)$．よって，$hX^th \in A(n)$ であり，

$$\exp(hX^th) = h(\exp X)^th = g.$$

□

9 Wirtinger 不等式

複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ 内の偶数 $2m$ 次元の実ベクトル空間全体の中の特別なクラスとして複素 m 次元複素部分空間がある．この節では，一般の $2m$ 次元実ベクトル空間について成り立つ Wirtinger 不等式と呼ばれる絶対不等式を紹介し，その等号成立条件で複素 m 次元複素部分空間を特徴付ける (定理 9.7).[7]

複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ の標準基底を $\{e_1, \cdots .e_n\}$ で表すと，

$$\{e_1, \cdots, e_n, ie_1, \cdots, ie_n\}$$

[6]標準形の話を使わないこれ以上易しい証明を知らない．

[7]Cauchy-Schwarz の不等式とその等号成立条件と同じ香りを感じるでしょうか？

は $\mathbb{C}^n$ の係数体を $\mathbb{R}$ に制限した実ベクトル空間の基底になる．$\mathbb{R}^{2n}$ の標準基底を $\{e_1, \cdots, e_n, e_{n+1}, \cdots, e_{2n}\}$ と表し，$ie_j = e_{n+j}$ $(1 \leq j \leq n)$ と同一視すると，$\mathbb{R}$ 上ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ は $\mathbb{R}^{2n}$ と同一視される：

$$\mathbb{C}^n = \mathbb{C}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}e_n = \mathbb{R}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}e_n \oplus \mathbb{R}ie_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}ie_n = \mathbb{R}^{2n}$$

すなわち，

$$\mathbb{C}^n \leftrightarrow \mathbb{R}^{2n}; \begin{pmatrix} x_1 + iy_1 \\ \vdots \\ x_n + iy_n \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad (x_j, y_j \in \mathbb{R})$$

と同一視している．$\mathbb{C}^n$ の演算 $v \mapsto iv$ から $\mathbb{R}^{2n}$ に複素構造 J が誘導される：

$$Je_j = ie_j = e_{n+j}, \quad Je_{n+j} = i^2 e_j = -e_j \quad (1 \leq j \leq n)$$

行列表示では

$$J = \begin{pmatrix} O & -E_n \\ E_n & O \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^{2n}$ の標準内積を $\langle\ ,\ \rangle$ と表す．

$$u = \sum_{j=1}^n x_j e_j + \sum_{j=1}^n y_j ie_j, \quad v = \sum_{j=1}^n x'_j e_j + \sum_{j=1}^n y'_j ie_j \in \mathbb{R}^{2n}$$

に対し，

$$\langle u, v \rangle = \sum_{j=1}^n (x_j x'_j + y_j y'_j)$$

ここで，

$$Ju = -\sum_{j=1}^n y_j e_j + \sum_{j=1}^n x_j ie_j, \quad Jv = -\sum_{j=1}^n y'_j e_j + \sum_{j=1}^n x'_j ie_j$$

だから，$\langle Ju, Jv \rangle = \langle u, v \rangle$．すなわち，$J \in O(2n)$．特に，$\|Ju\| = \|u\|$．また，

$$\langle Ju, u \rangle = \langle J^2 u, Ju \rangle = -\langle u, Ju \rangle = -\langle Ju, u \rangle$$

より，$\langle Ju, u\rangle = 0$ が得られる．次に同一視 $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ の下で $U(n)$ の $\mathbb{C}^n$ への作用を $\mathbb{R}^{2n}$ への作用として書けば

$$U(n) \cong \left\{ \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} A + iB \in U(n), \\ A, B \in M_n(\mathbb{R}) \end{array} \right\} \subset O(2n)$$

が得られる．特に $U(n)$ の $\mathbb{R}^{2n}$ への作用は標準内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を保つ．$U(n)$ の $\mathbb{C}^n$ への作用は複素線形だから，任意の $g \in U(n)$ について $gJ = Jg$ が得られる．$u, v \in \mathbb{R}^{2n}$ に対し，$\Omega(u, v) = \langle u, Jv\rangle$ とおくと，

$$\Omega(u, v) = \langle u, Jv\rangle = \langle Ju, J^2 v\rangle = -\langle Ju, v\rangle = -\Omega(v, u)$$

となり，Ω は $\mathbb{R}^{2n}$ 上の交代形式になる．Ω を $(\mathbb{R}^{2n}, J, \langle\ ,\ \rangle)$ の**ケーラー形式**という．$u, v \in \mathbb{R}^{2n}$ に対し，

$$\Omega(Ju, Jv) = \langle Ju, J^2 v\rangle = \langle u, Jv\rangle = \Omega(u, v)$$

よって，Ω は J-不変である．$u, v \in \mathbb{R}^{2n}, g \in U(n)$ に対し，

$$\begin{aligned} \Omega(gu, gv) &= \langle gu, Jgv\rangle && (\Omega \text{ の定義}) \\ &= \langle gu, gJv\rangle && (Jg = gJ) \\ &= \langle u, Jv\rangle && (g \in U(n) \subset O(2n)) \\ &= \Omega(u, v) && (\Omega \text{ の定義}) \end{aligned}$$

よって，Ω は $U(n)$-不変である．$u, v \in \mathbb{R}^{2n}$ とする．シュワルツの不等式より

$$0 \leq |\Omega(u, v)| = |\langle u, Jv\rangle| \leq \|u\|\|Jv\| = \|u\|\|v\|$$

$\|u\| = \|v\| = 1$ のとき，$0 \leq |\Omega(u, v)| \leq 1$ であり，

$$\begin{aligned} |\Omega(u, v)| = 1 &\Leftrightarrow Jv = \pm u, \\ |\Omega(u, v)| = 0 &\Leftrightarrow u \perp Jv \end{aligned}$$

$\mathbb{R}^{2n}$ 内の k 次元実部分空間全体のなす集合 $G_k^{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n)$ は **Grassmann 多様体**と呼ばれている．ユニタリー群 $U(n)$ の $\mathbb{C}^n$ への自然な作用は $G_k^{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n)$ への作用を誘導する : $g \in U(n), V \in G_k^{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n)$ に対して，$gV = \{gv \mid v \in V\}$. $V \in G_k^{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n)$ が**複素部分空間**であるとは，$JV = V$ となるときを言う．このとき，k は偶数である．$V \in G_k^{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n)$ が**全実部分空間**であるとは，$JV \perp V$ となるときを言う．これらは $U(n)$-不変な概念である : V が複素部分空間

ならば，任意の $g \in U(n)$ に対して，gV も複素部分空間であり，V が全実部分空間ならば，gV も全実部分空間である．

$u_1, \cdots, u_{2m} \in \mathbb{C}^n$ に対し，$\Omega^m(u_1, \cdots, u_{2m}) \in \mathbb{R}$ を

$$\Omega^m(u_1, \cdots, u_{2m}) := \frac{1}{2^m} \sum_{\sigma \in S_{2m}} \mathrm{sgn}(\sigma) \Omega(u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)}) \cdots \Omega(u_{\sigma(2m-1)}, u_{\sigma(2m)})$$

と定める．ここで，S_{2m} は $2m$ 次対称群である．

$V \in G_{2m}^{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n)$ の正規直交基底 $\{u_1, \cdots, u_{2m}\}$ をとり，

$$|\Omega^m|(V) := |\Omega^m(V)| = |\Omega^m(u_1, \cdots, u_{2m})| \geq 0$$

とおく．次の命題は $|\Omega^m|(V)$ の定義が well-defined であることを示している．

命題 9.1. $|\Omega^m|(V)$ の定義は V の正規直交基底 $\{u_1, \cdots, u_{2m}\}$ の取り方によらない．

証明. $\{v_1, \cdots, v_{2m}\}$ を V の他の正規直交基底とすると，$g = (g_{ij}) \in O(2m)$ が存在して，

$$(v_1, \cdots, v_{2m}) = (u_1, \cdots, u_{2m})g \quad \text{すなわち} \quad v_j = \sum_{i=1}^{2m} g_{ij} u_i$$

g の第 i 行を g_i と表すと，

$$\begin{aligned}
&2^m \Omega^m(v_1, \cdots, v_{2m}) \\
&= \sum_{\sigma \in S_{2m}} \mathrm{sgn}(\sigma) \Omega(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}) \cdots \Omega(v_{\sigma(2m-1)}, v_{\sigma(2m)}) \\
&= \sum_{\sigma \in S_{2m}} \sum_{i_1, \cdots, i_{2m}} \mathrm{sgn}(\sigma) g_{i_1 \sigma(1)} \cdots g_{i_{2m} \sigma(2m)} \Omega(u_{i_1}, u_{i_2}) \cdots \Omega(u_{i_{2m-1}}, u_{i_{2m}}) \\
&= \sum_{i_1, \cdots, i_{2m}} \begin{vmatrix} g_{i_1} \\ \vdots \\ g_{i_{2m}} \end{vmatrix} \Omega(u_{i_1}, u_{i_2}) \cdots \Omega(u_{i_{2m-1}}, u_{i_{2m}})
\end{aligned}$$

ここで，$i_1, \cdots, i_{2m}$ の中に同じものがあれば，$\begin{vmatrix} g_{i_1} \\ \vdots \\ g_{i_{2m}} \end{vmatrix} = 0$ となるから，

$i_1, \cdots, i_{2m}$ は互いに異なるものについてのみ和をとればよい．よって，

$$
\begin{aligned}
&2^m \Omega^m(v_1, \cdots, v_{2m}) \\
&= \sum_{\sigma \in S_{2m}} \mathrm{sgn}(\sigma) \Omega(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}) \cdots \Omega(v_{\sigma(2m-1)}, v_{\sigma(2m)}) \\
&= \sum_{\tau \in S_{2m}} \begin{vmatrix} g_{\tau(1)} \\ \vdots \\ g_{\tau(2m)} \end{vmatrix} \Omega(u_{\tau(1)}, u_{\tau(2)}) \cdots \Omega(u_{\tau(2m-1)}, u_{\tau(2m)}) \\
&= |g| \sum_{\tau \in S_{2m}} \mathrm{sgn}(\tau) \Omega(u_{\tau(1)}, u_{\tau(2)}) \cdots \Omega(u_{\tau(2m-1)}, u_{\tau(2m)}) \\
&= 2^m |g| \Omega^m(u_1, \cdots, u_{2m})
\end{aligned}
$$

$|g| = \pm 1$ だから主張が得られる． □

例 9.2. $V \in G_2^{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n)$ に対し，V の正規直交基底 $\{u, v\}$ をとる．このとき，$0 \leq |\Omega(u, v)| \leq 1$ であり，

$$
\begin{aligned}
&|\Omega(V)| = 1 \Leftrightarrow V = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{u, \pm Ju\} = \mathbb{C}u \quad (\text{複素部分空間}), \\
&|\Omega(V)| = 0 \Leftrightarrow V \perp JV \quad (\text{全実})
\end{aligned}
$$

$\theta \in [0, \pi/2]$ に対し，

$$
V(\theta) := \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}(i \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2) \in G_2^{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n)
$$

とおく．

例 9.3. 任意の $V \in G_2^{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n)$ に対し，$g \in U(n)$ と $\theta \in [0, \pi/2]$ が存在して，$gV = V(\theta)$.

また，$\theta_1, \theta_2 \in [0, \pi/2]$ に対し，$g \in U(n)$ が存在して，$V(\theta_1) = gV(\theta_2)$ となったとすると，$\theta_1 = \theta_2$.

証明. (後半) $g \in U(n)$ が存在して，$V(\theta_1) = gV(\theta_2)$ となったとすると

$$
\cos\theta_1 = |\Omega(V(\theta_1))| = |\Omega(gV(\theta_2))| = |\Omega(V(\theta_2))| = \cos\theta_2
$$

$\theta_1, \theta_2 \in [0, \pi/2]$ だから，$\theta_1 = \theta_2$.

(前半) $V \in G_2^{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n)$ の正規直交基底を $\{u, v\}$ とする．$U(n)$ は $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ に推移的に作用するから，$g_1 \in U(n)$ が存在して，$g_1 u = e_1$. このと

き，$\{e_1, g_1 v\}$ は $g_1 V$ の正規直交基底になる．$U(n-1)$ と同型な $U(n)$ の部分群

$$U(n-1) \cong \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \middle| g \in U(n-1) \right\} \subset U(n)$$

は $S^{2n-3} \subset U(n-1)$ に推移的に作用するから，$g_2 \in U(n-1)(\subset U(n))$ が存在して，

$$g_2 g_1 v = \begin{pmatrix} ia \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \qquad (b \geq 0, a \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1)$$

と表示される．$g := g_2 g_1 \in U(n)$ とおくと，$\{e_1, gv\}$ は gV の正規直交基底である．$\theta \in [0, \pi]$ が存在して，

$$gv = \begin{pmatrix} i\cos\theta \\ \sin\theta \\ O \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

もし $\pi/2 < \theta \leq \pi$ のときは，

$$g_3 := \begin{pmatrix} -1 & \\ & E_{n-1} \end{pmatrix} \in U(n)$$

だから，

$$g_3 g V = \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \left\{ -e_1, \begin{pmatrix} -i\cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \left\{ e_1, \begin{pmatrix} i\cos(\pi-\theta) \\ \sin(\pi-\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

となり，証明が完成した． $\square$

上の例より，$U(n)$ の $G_2^{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n)$ への作用の軌道空間について

$$U(n)\backslash G_2^{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n) = \{U(n)V(\theta) \mid \theta \in [0, \pi/2]\} \cong [0, \pi/2]$$

例 9.4. $2m \leq n$ とする．組 $\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_m) \in [0, \pi/2]^m$ に対して $V(\theta) \in G_{2m}^{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n)$ を

$$V(\theta) = \langle e_1, i\cos\theta_1 e_1 + \sin\theta_1 e_2 \rangle_{\mathbb{R}} \oplus \cdots \oplus \langle e_{2m-1}, i\cos\theta_m e_{2m-1} + \sin\theta_m e_{2m} \rangle_{\mathbb{R}}$$

と定めると

$$\frac{1}{m!}\left|\Omega^m(V(\theta))\right| = \cos\theta_1\cdots\cos\theta_m \leq 1$$

$$= 1 \Leftrightarrow V \text{ は複素部分空間.}$$

$\theta = (0, \cdots, 0)$ のとき，$V(\theta)$ は $\mathbb{C}^n$ の複素部分空間であり，$\theta = (\pi/2, \cdots, \pi/2)$ のとき，$V(\theta)$ は全実部分空間となる．

証明. $1 \leq j \leq m$ に対して，

$$u_{2j-1} = e_{2j-1}, \quad u_{2j} = i\cos\theta_j e_{2j-1} + \sin\theta_j e_{2j}$$

とおくと，$\Omega(u_{2j-1}, u_{2j}) = -\Omega(u_{2j}, u_{2j-1}) = -\cos\theta_j$ であり，その他の j, k に対して，$\Omega(u_j, u_k) = 0$ となる．$\Omega^m(u_1, \cdots, u_{2m})$ の定義より

$$\Omega^m(u_1, \cdots, u_{2m}) = \frac{1}{2^m}\sum_{\sigma\in S_{2m}} \mathrm{sgn}(\sigma)\Omega(u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)})\cdots\Omega(u_{\sigma(2m-1)}, u_{\sigma(2m)})$$

$$= \sum_{\sigma\in S_{2m}, \sigma(2j-1)<\sigma(2j)} \mathrm{sgn}(\sigma)\Omega(u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)})\cdots\Omega(u_{\sigma(2m-1)}, u_{\sigma(2m)})$$

$$= \sum_{\sigma\in S_{2m}, \sigma(2j-1)+1=\sigma(2j)} \mathrm{sgn}(\sigma)\Omega(u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)})\cdots\Omega(u_{\sigma(2m-1)}, u_{\sigma(2m)})$$

$\{1, 3, \cdots, 2m-1\}$ 上の全単射の全体のなす m 次対称群を S_m と表すと，

$$\mathrm{sgn}(\tau(1), \tau(1)+1, \cdots, \tau(2m-1), \tau(2m-1)+1) = \mathrm{sgn}(\tau)^2 = 1$$

だから，

$$\begin{aligned}\Omega^m(u_1, \cdots, u_{2m}) &= \sum_{\tau\in S_m} \Omega(u_{\tau(1)}, u_{\tau(1)+1})\cdots\Omega(u_{\tau(2m-1)}, u_{\tau(2m-1)+1}) \\ &= m!\Omega(u_1, u_2)\cdots\Omega(u_{2m-1}, u_{2m}) \\ &= m!(-1)^m\cos\theta_1\cdots\cos\theta_m\end{aligned}$$

$0 \leq \theta_j \leq \pi/2$ だから

$$\left|\frac{1}{m!}\Omega^m(V)\right| = \cos\theta_1\cdots\cos\theta_m \leq 1$$

$$= 1 \Leftrightarrow V \text{ は複素部分空間.}$$

□

田崎博之 ([5]) は次を示した．

定理 9.5. $2m \le n$ とする．任意の $V \in G_{2m}^{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n)$ に対し，$g \in U(n)$ と $\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_m)$, $0 \le \theta_1 \le \cdots \le \theta_m \le \pi/2$ が存在して，$gV = V(\theta)$.

証明. $\{u_1, \cdots, u_{2m}\}$ を V の正規直交基底とする．この正規直交基底は複素構造と無関係なので必ずしもよい基底とは言えない．そこで交代行列の標準形の議論をケーラー形式に適用することにより複素構造を反映したよい正規直交基底を取り直す．$2m$ 次交代行列 $(\Omega(u_i, u_j))_{1 \le i,j \le 2m}$ を直交行列で標準形にすることを考えると，V の正規直交基底

$$\{u_1, \cdots, u_m, u_{m+1}, \cdots, u_{2m}\}$$

で次の条件を満たすものが存在することが示される：

$$\Omega(u_i, u_j) = \Omega(Ju_i, Ju_j) = 0 \quad (1 \le i, j \le m \text{ または } m+1 \le i, j \le 2m),$$
$$\Omega(u_i, u_{m+j}) = a_i \delta_{ij} \quad (a_i \in \mathbb{R}, 1 \le i, j \le m)$$

ここで，後述の補題 9.6 を用いた．このとき，

$$V = \sum_{j=1}^{m} \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{u_j, u_{j+m}\},$$
$$\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{u_j, u_{j+m}\} \subset \{u_j, Ju_j, u_{j+m}, Ju_{j+m}\}_{\mathbb{R}} = \mathbb{C}u_j + \mathbb{C}u_{m+j},$$
$$j \ne k \text{ のとき } \mathbb{C}u_j + \mathbb{C}u_{m+j} \perp \mathbb{C}u_k + \mathbb{C}u_{m+k}$$

ここで，$\mathbb{C}u_j + \mathbb{C}u_{m+j}$ は直和とは限らない．例えば，$u_{m+j} = \pm u_j$ のとき，$\mathbb{C}u_j + \mathbb{C}u_{m+j} = \mathbb{C}u_j$. $\mathbb{C}u_j + \mathbb{C}u_{m+j}$ は複素 2 次元または複素 1 次元の複素部分空間になる．これらの次元の和は

$$\sum_{j=1}^{m} \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}u_j + \mathbb{C}u_{m+j}) \le 2m \le n = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n$$

を満たす．系 4.5 より，$g \in SU(n) (\subset U(n))$ が存在して，任意の $1 \le j \le m$ に対して，

$$g(\mathbb{C}u_j + \mathbb{C}u_{m+j}) \subset \mathbb{C}e_j \oplus \mathbb{C}e_{m+j}$$

が成り立つ.[8] 以下，混乱の恐れのない限り $V \in G_{2m}^{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n)$ と gV $(g \in U(n))$ とを同一視する．gV, gu_j をそれぞれ新たに V, u_j とおくと，

$$V = \sum_{j=1}^{m} \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{u_j, u_{j+m}\}, \quad \mathbb{C}u_j + \mathbb{C}u_{m+j} \subset \mathbb{C}e_j \oplus \mathbb{C}e_{m+j} \quad (1 \le j \le m)$$

[8] この部分までで，この証明は勝負あった！となっている．

$SU(2)$-作用を考えることにより，$u_j = e_j$ $(1 \le j \le m)$ としてよい：

$$V = \sum_{j=1}^{m} \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{e_j, u_{j+m}\}, \quad u_{j+m} \in \mathbb{C}e_j \oplus \mathbb{C}e_{m+j}$$

$e_j \perp u_{j+m}$ より，$u_{j+m} \in \mathbb{R}ie_j \oplus \mathbb{C}e_{m+j}$．$U(1) = U(\mathbb{C}e_{m+j})$-作用を考えることにより，

$$u_{j+m} = (\cos\theta_j)ie_j + (\sin\theta_j)e_{m+j} \qquad (0 \le \theta_j \le \pi)$$

としてよい．$e_j \mapsto -e_j$ は $U(1)$-作用なので，$0 \le \theta_j \le \pi/2$ としてよい．$\{1, \cdots, m\}, \{m+1, \cdots, 2m\}$ の置換 $S_m \times S_m$ は自然に $U(2m)$-作用に拡張されるので，$0 \le \theta_1 \le \cdots \le \theta_m \le \pi/2$ とすることができる．よって，任意の $V \in G_{2m}^{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n)$ に対して，$g \in U(n)$ と $0 \le \theta_1 \le \cdots \le \theta_m \le \pi/2$ が存在して，

$$gV = \sum_{j=1}^{m}\{e_j, (\cos\theta_j)ie_j + (\sin\theta_j)e_{k+j}\}_{\mathbb{R}}$$

となる． □

補題 9.6. $\omega : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を交代線形写像とする．$\mathbb{R}^n$ の正規直交基底 $\{u_1, \ldots, u_n\}$ に対して，n 次交代行列 $(\omega(u_i, u_j))_{1 \le i,j \le n}$ を考える．直交行列 $g \in O(n)$ に対して，

$${}^t g(\omega(u_i, u_j))_{1 \le i,j \le n} g = (\omega(gu_i, gu_j))_{1 \le i,j \le n}$$

証明. $gu_i = \sum_{j=1}^{n} g_{ji}u_j$ と表示する．このとき，

$$\omega(gu_i, gu_j) = \sum_{k,l} g_{ki}g_{lj}\omega(u_k, u_l) = \sum_{k,l} g_{ki}\omega(u_k, u_l)g_{lj}$$

よって主張が得られる． □

定理 9.7 (Wirtinger 不等式)**.** ([2, Lemma 6.13], [3, Lemma 7.18]) $V \in G_{2m}^{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n)$ に対して，

$$\left|\frac{1}{m!}\Omega^m(V)\right| \le 1$$
$$= 1 \Leftrightarrow V \text{ は複素部分空間 } (JV = V).$$

証明. $U(n)$ の $\mathbb{R}^{2n}$ への作用は複素線形で計量を保つから，$g \in U(n)$ と $V \in G_{2m}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2n})$ に対して，$\left|\frac{1}{m!}\Omega^m(gV)\right| = \left|\frac{1}{m!}\Omega^m(V)\right|$ となる．そこで主張を示すためには，$V = V(\theta_1, \cdots, \theta_m)$ の形であると仮定して一般性を失わない．例 9.4 から主張が従う． □

参考文献

[1] A. L. Besse, Einstein manifolds, Springer-Verlag, (1987).

[2] R. Harvey and H. B. Lawson, Jr., Calibrated geometries, Acta Math., **148** (1982), 47–157.

[3] R. Harvey, Spinors and calibrations, Academic Press (1990).

[4] B. O'Neill, Semi-Riemannian geometry with applications to relativity, Academic Press, (2010).

[5] H. Tasaki, Generalization of Kähler angle and integral geometry in complex projective spaces, Steps in Differential Geometry, (Debrecen, 2000), 349–361, Inst. Math. Inform. , Debrecen, 2001; http://www.emis.de/proceedings/CDGD2000/pdf/K_Tasaki.pdf.

[6] 岩堀長慶編，線形代数学，裳華房

[7] 笠原晧著，微分方程式の基礎，朝倉書店

[8] 三宅敏恒著，入門線形代数，培風館

[9] https://rms2005.org/subtext_data/pdf/0020_20180914/ms0020.pdf 立命館大学理工学部数学学修相談会，簡約行列の一意性，2018 年 10 月 4 日,

問題解答　（一部の問題のみ）

問題 3.2. m, n を $m \leq n$ となる自然数とする．

(1) 写像

$$i : K^m \to K^n; \boldsymbol{x} \mapsto \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$

は単射線形写像であることを示せ．また，i の表現行列を求めよ．

(2) 写像

$$p : K^n \to K^m; \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

は全射線形写像であることを示せ．また，$\mathrm{Ker}(p)$ を求めよ．さらに p の表現行列を求めよ．

(3) 合成写像 $p \circ i : K^m \to K^m$ と $i \circ p : K^n \to K^n$ のそれぞれの表現行列を求めよ．

証明. (1) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in K^m, a, b \in K$ に対し，

$$\iota(a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} = a\iota(\boldsymbol{x}) + b\iota(\boldsymbol{y})$$

ゆえに ι は線形写像である．

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in K^m$ に対し，

$$\iota(\boldsymbol{x}) = \iota(\boldsymbol{y}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$$

ゆえに，ι は単射である．

標準基底に関する ι の表現行列は

$$\begin{pmatrix} E_m \\ O_{n-mm} \end{pmatrix}$$

(2) K^n の元を m 次列ベクトルと $n-m$ 次列ベクトルを縦に並べ

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} \in K^m \quad (x, y \in K^m, x', y' \in K^{n-m})$$

と表す．$a, b \in K$ とすると，

$$\begin{aligned} p\left(a\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}\right) &= p\begin{pmatrix} ax+by \\ ax'+by' \end{pmatrix} = ax+by \\ &= ap\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} + bp\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ゆえに，p は線形写像である．任意の $x \in K^m$ に対し，

$$p\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = x$$

ゆえに，p は全射である．$\mathrm{Ker}(p)$ は

$$\mathrm{Ker}(p) = \left\{ \begin{pmatrix} 0_m \\ x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| x_{m+1}, \cdots, x_n \in K \right\}$$

標準基底に関する p の表現行列は

$$\begin{pmatrix} E_m & O_{m,n-m} \end{pmatrix}$$

(3) $x \in K^m$ に対し，

$$(p \circ \iota)(x) = p\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = x$$

$p \circ i$ の表現行列は E_m．$x \in K^m, x' \in K^{n-m}$ に対し，

$$(\iota \circ p)\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \iota(x) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\iota \circ p$ の表現行列は

$$\begin{pmatrix} E_m & O_{m,n-m} \\ O_{n-m,m} & O_{n-m,n-m} \end{pmatrix}$$

□

問題 3.3. (m,n) 行列 A に対して，$\mathrm{rank}({}^tA) = \mathrm{rank}(A)$ となることを示せ.

証明. $r = \mathrm{rank}(A)$ とおくと，m 次正則行列 P と n 次正則行列 Q が存在して，

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

両辺の転置をとると，

$${}^tQ{}^tA{}^tP = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

${}^tQ, {}^tP$ は正則だから，$\mathrm{rank}({}^tA) = r = \mathrm{rank}(A)$. □

問題 3.4. (例題 1.1 を参照)

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2^2 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & x_n^2 \end{pmatrix}$$

を求めよ.

解答. $(x_1, \cdots, x_n) = (0, \cdots, 0)$ のとき，$\mathrm{rank} = 0$.

$(x_1, \cdots, x_n) \neq (0, \cdots, 0)$ のとき，ある i が存在して，$x_i \neq 0$. このとき，

$$\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2^2 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & x_n^2 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\to} \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2^2 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & x_n^2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{(2)}{\to} \begin{pmatrix} & O & \\ x_1 & \cdots & x_n \\ & O & \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

ここで (1) は第 i 行に x_i^{-1} をかけた. (2) は第 j 行 $(j \neq i)$ に第 i 行の $-x_j$ 倍を加えた. よって，

$$\mathrm{rank} = \begin{cases} 0 & ((x_1, \cdots, x_n) = (0, \cdots, 0) \text{ のとき}) \\ 1 & ((x_1, \cdots, x_n) \neq (0, \cdots, 0) \text{ のとき}) \end{cases}$$

□

問題 4.1. [Hadamard の不等式 I] $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ を n 個の n 次列ベクトルとする．このとき，

$$|\det(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)| \leq \|\boldsymbol{a}_1\| \cdots \|\boldsymbol{a}_n\|,$$
$$\text{“}=\text{''} \Leftrightarrow \boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n \text{は互いに直交}$$

となることを示せ.

証明 *1.* まず，

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{3n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

という特別な形のベクトルに対して，主張が正しいことをいう．この形の場合には，$(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ が上三角行列になるので，

$$\begin{aligned} |\det(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)| &= |a_{11}||a_{22}| \cdots |a_{nn}| \\ &\leq \|\boldsymbol{a}_1\| \cdots \|\boldsymbol{a}_n\|, \\ &\text{“}=\text{''} \Leftrightarrow \boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n \text{は互いに直交} \end{aligned}$$

部分群の列 $O(n) \supset O(n-1) \supset \cdots \supset O(1)$ があることに注意すると，任意の $\boldsymbol{a}'_1, \cdots, \boldsymbol{a}'_n \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ に対して，直交行列 $T \in O(n)$ が存在して，$\boldsymbol{a}_i := T\boldsymbol{a}'_i$ とおくと，$\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ は上の形になる．このとき，$(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = T(\boldsymbol{a}'_1, \cdots, \boldsymbol{a}'_n), |\det(T)| = 1$ だから，

$$\begin{aligned} |\det(\boldsymbol{a}'_1, \cdots, \boldsymbol{a}'_n)| &= |\det(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)| \\ &\leq \|\boldsymbol{a}_1\| \cdots \|\boldsymbol{a}_n\| = \|\boldsymbol{a}'_1\| \cdots \|\boldsymbol{a}'_n\| \\ &\text{“}=\text{''} \Leftrightarrow \boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n \text{は互いに直交} \\ &\quad \Leftrightarrow \boldsymbol{a}'_1, \cdots, \boldsymbol{a}'_n \text{は互いに直交} \end{aligned}$$

□

証明 *2.* 証明の準備として，$X = (x_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ を正値対称行列とすると，

$$0 < |X| \leq x_{11} \cdots x_{nn}$$
$$\text{“}=\text{''} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & x_{nn} \end{pmatrix}$$

が成り立つことを示す．仮定より，$P = (p_{ij}) \in O(n)$ と $\lambda_i > 0$ が存在して，

$$X = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$$

両辺の対角成分を比較して，

$$x_{ii} = \sum_{k,l} p_{ik}\lambda_k\delta_{kl}p_{il} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}^2\lambda_k \geq p_{ii}^2\lambda_i \geq \lambda_i$$

また，$|X| = \lambda_1 \cdots \lambda_n > 0$ であり，

$$|X| = \lambda_1 \cdots \lambda_n \leq x_{11} \cdots x_{nn}$$
$$\text{“}=\text{''} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

以上の準備の下に主張を示す．$\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ が線形従属のとき，$\det(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = 0$．$\boldsymbol{a}_i \neq 0$ より，

$$|\det(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)| < \|\boldsymbol{a}_1\| \cdots \|\boldsymbol{a}_n\|$$

となり主張が成り立つ．

以下，$\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ が線形独立のときに，主張を示す．$X := {}^tAA = ({}^t\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_j) = (\langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j \rangle)$ は正値対称行列だから，

$$(\det A)^2 \leq \|\boldsymbol{a}_1\|^2 \cdots \|\boldsymbol{a}_n\|^2$$
$$\text{“}=\text{''} \Leftrightarrow \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j \rangle = 0 \quad (i \neq j)$$

よって，

$$|\det A| \leq \|\boldsymbol{a}_1\| \cdots \|\boldsymbol{a}_n\|$$
$$\text{“}=\text{''} \Leftrightarrow \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j \rangle = 0 \quad (i \neq j)$$

ゆえに，主張が示された． □

問題 4.2. 次を示せ．

(1) n 次ユニタリー行列の全体 $U(n)$ は行列の積に関して群になる．

(2) 任意の $T \in U(n)$ に対して，$|\mathrm{det}T| = 1$.

証明. (1) $g, h \in U(n)$ とする．このとき，

$$\begin{aligned}(gh)^*(gh) &= (h^*g^*)(gh) = h^*(g^*g)h = h^*E_nh \qquad (g \in U(n)) \\ &= h^*h = E_n \qquad (h \in U(n))\end{aligned}$$

ゆえに $gh \in U(n)$．$g * g = E_n$ より $g^{-1} = g^*$.

$$(g^{-1})^{-1} = (g^*)^{-1} = (g^{-1})^*$$

よって，$g^{-1} \in U(n)$．以上より，$U(n)$ は行列の積に関して群になる．
(2) $E_n = T^*T$ の両辺の行列式をとると，

$$\begin{aligned}1 &= \det(E_n) = \det(T^*T) = \det(T^*)\det(T) = \det({}^t\overline{T})\det(T) \\ &= \det({}^t\overline{T})\det(T) = \det(\overline{T})\det(T) = \overline{\det(T)}\det(T) = |\det(T)|^2\end{aligned}$$

$0 \le |\det(T)|$ より $|\det(T)| = 1$. □

問題 4.6. [Hadamard の不等式 II] 次を示せ．$\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ に対して，

$$|\det(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)| \le \prod_{j=1}^{n} |\boldsymbol{a}_j|$$

$$``='' \Leftrightarrow \boldsymbol{a}_i^*\boldsymbol{a}_j = 0 \quad (i \ne j)$$

証明 *1.* $U(n)$ が $\mathbb{C}^n$ の超球面に推移的に働くことと，自然な包含関係 $U(1) \subset U(2) \subset \cdots \subset U(n)$ があることから，$g \in U(n)$ が存在して，

$$\boldsymbol{a}'_1 := g\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}'_2 := g\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \boldsymbol{a}'_n := g\boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

ここで，$a_{jj} \ge 0$．このとき，

$$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = \det(g\boldsymbol{a}_1, \cdots, g\boldsymbol{a}_n) = \det(g)\det(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$$

両辺の絶対値をとると

$$|\det(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)| = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \leq |g\boldsymbol{a}_1|\cdots|g\boldsymbol{a}_n|$$

仮定 $\boldsymbol{a}_j \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ より，

$$\text{``}='' \Leftrightarrow a_{jj} = |\boldsymbol{a}_j| \Leftrightarrow \boldsymbol{a}'_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{jj} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{a}'^*_i \boldsymbol{a}'_j = 0 \quad (i \neq j)$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{a}^*_i \boldsymbol{a}_j = 0 \quad (i \neq j)$$

□

証明 *2.* 証明の準備として，$X = (x_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ を正値 Hermite 行列とするとき，

$$0 < |X| \leq x_{11}\cdots x_{nn}$$

$$\text{``}='' \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & x_{nn} \end{pmatrix}$$

となることを示す．仮定より，$P = (p_{ij}) \in U(n)$ と $\lambda_i > 0$ が存在して，

$$X = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x_n \end{pmatrix} P^*$$

両辺の対角成分を比較して，

$$x_{ii} = \sum_{k=1}^{n} |p_{ik}|^2 \lambda_k \geq |p_{ii}|^2 \lambda_i \geq \lambda_i$$

また，$|X| = \lambda_1 \cdots \lambda_n > 0$ であり，

$$|X| = \lambda_1 \cdots \lambda_n \leq x_{11}\cdots x_{nn}$$

$$\text{``}='' \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

以上の準備の下に主張を示す．

$\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ が線形従属のときは，

$$|\det(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)| = 0 < \prod_{j=1}^{n} |\boldsymbol{a}_j|$$

となり，主張が成り立つ．

以下，$\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ を線形独立とする．$X := A^*A = (\langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j \rangle)$ は正値 Hermite 行列だから，

$$\det X = |\det A|^2 \leq \|\boldsymbol{a}_1\|^2 \cdots \|\boldsymbol{a}_n\|^2$$
$$\text{“} =\text{''} \Leftrightarrow \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j \rangle = 0 \quad (i \neq j)$$

よって，

$$|\det A| \leq \|\boldsymbol{a}_1\| \cdots \|\boldsymbol{a}_n\|$$
$$\text{“} =\text{''} \Leftrightarrow \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j \rangle = 0 \quad (i \neq j)$$

ゆえに，主張が示された． □

問題 5.1. $|\alpha| < 1$ のとき，$\lim_{m\to\infty} J_n(\alpha)^m = 0$ となることを示せ．

証明．$J_n(\alpha) = \alpha E_n + N$ と表示すると，$N^n = O$．$m \geq n$ とする．二項定理より

$$J_n(\alpha)^m = \alpha^m E_n + {}_mC_1 \alpha^{m-1} N + \cdots + {}_mC_{n-1} \alpha^{m-(n-1)} N^{n-1}$$

右辺の項の数は m によらずに n だから，主張を示すためには，$|\alpha| < 1$ のとき，

$$\lim_{m\to\infty} {}_mC_k |\alpha|^{m-k} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$$

を示せばよい．ここで，

$$0 < {}_mC_k = \frac{m(m-1)\cdots(m-(k-1))}{k!} \leq \frac{m^k}{k!}$$

$1 < \frac{1}{|\alpha|} = 1 + h \ (h > 0)$ と表示すると，

$$\begin{aligned} |\alpha|^{m-k} &= \frac{1}{(1+h)^{m-k}} \\ &\leq \frac{1}{{}_{m-k}C_{k+1} h^{k+1}} = \frac{(k+1)!}{(m-k)(m-k-1)\cdots(m-k-k)h^{k+1}} \\ &\leq \frac{(k+1)!}{(m-2k)^{k+1} h^{k+1}} \end{aligned}$$

よって，

$$0 \leq {}_mC_k|\alpha|^{m-k} \leq \frac{m^k}{(m-2k)^{k+1}} \cdot \frac{k+1}{h^{k+1}} \to 0 \quad (m \to \infty)$$

ゆえに主張が示された． □

問題 5.8. 次の行列 A について $\exp tA$ を求めよ．

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \qquad\qquad (2) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

証明. A の固有多項式を $f_A(\lambda) = |\lambda E_2 - A|$ と表す．

(1) $f_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)$ より，A の固有値は $1, 2$．ゆえに A は対角化可能である．A の固有値 1 に対する固有ベクトルと固有値 2 に対する固有ベクトルを順に並べ，

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

とおくと，P は正則で，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

以上より，

$$\exp tA = P \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} -2e^t + 3e^{2t} & -2e^t + 2e^{2t} \\ 3e^t - 3e^{2t} & 3e^t - 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

(2) $f_A(\lambda) = (\lambda-2)^2$ より，A の固有値は 2(重根)．$A \neq 2E_n$ より A は対角化不可能である．A の固有値 2 に対する固有ベクトルは

$$c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (c \neq 0)$$

これを踏まえて正則行列 P とべき零行列 N を

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と定めると，$P^{-1}AP = 2(E_2 + N)$．$m = 0, 1, 2, \cdots$ に対し，

$$A^m = 2^m P(E+N)^m P^{-1} = 2^m P(E+mN)P^{-1}.$$

よって，

$$
\begin{aligned}
\exp tA &= P\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2t)^m}{m!}(E+mN)P^{-1} \\
&= P(e^{2t}EP^{-1}) + P\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2t)^m}{(m-1)!}NP^{-1} = e^{2t}E + 2te^{2t}PNP^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} e^{2t}+te^{2t} & te^{2t} \\ -te^{2t} & e^{2t}-te^{2t} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

□