

数学科目でのコンピュータの活用

峯 拓 矢*
mine@kit.ac.jp

この数十年でコンピュータ技術は加速度的な発展を遂げ、高度なツールが一般人にも手軽に扱える時代になりました。以下に、私の担当した数学科目の講義で実際に利用したツールで、学生にも比較的扱いやすいものを紹介していきます。

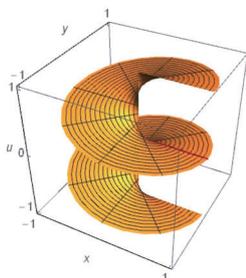
1. Mathematica

本学の情報科学センターでは数式処理システム Mathematica が利用できます。Mathematica の数式の記法は数学のものに近く、初心者も短時間で習得できるメリットがあります。偏微分方程式の解法を扱う「数理応用解析」では Mathematica を利用した課題を実施しています。偏微分方程式の解は多変数関数ですので、その解が何を表すかを理解するのは初学者にはなかなか難しいですが、Mathematica で解のグラフを表示させると解の構造が明快に理解できます。講義で行ったレポート課題から、いくつか例を挙げてみます。

・一階偏微分方程式

$$\begin{cases} yu_x - xu_y = \frac{1}{2\pi}, \\ u(s, 0) = 0 \quad (s > 0) \end{cases}$$

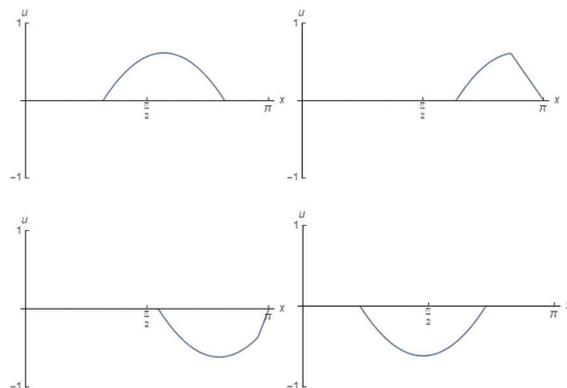
の解曲面のグラフ



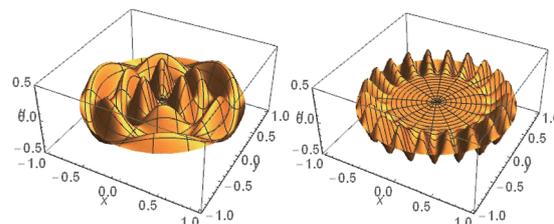
・区間 $[0, \pi]$ 上の固定端境界条件の波動方程式

$$\begin{cases} u_{tt} = k^2 u_{xx}, \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 \end{cases}$$

の解の時間変化



・円形膜の固有振動のグラフ



上記の波動方程式の解をフーリエ級数

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(U_n \cos kn t + \frac{V_n}{kn} \sin kn t \right) \sin nx$$

で表すと、式の形から解の挙動を把握するのはなかなか難しいと思います。Mathematica の動画機能を利用すると、上のように波が伝わって壁に反射される様子が実際に観察できます。

2. Excel

表計算ソフトの Excel は事務処理にも大変有用ですが、統計学の計算を行う際にも役立ちます。次の例題を考えてみましょう。

「サイコロを 100 回振ったとき、出た目の総和が 370 以上になる確率 p を求めよ。」

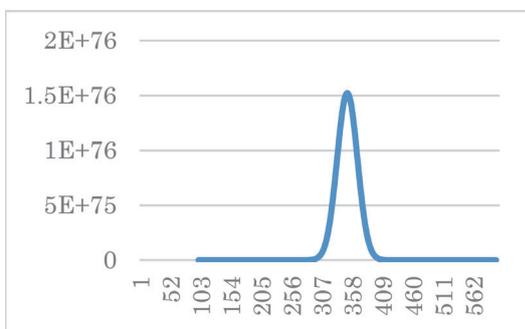
「統計数理」の講義では、この解を求めるのに中心極限定理、すなわち多数個の独立同分布する確率変数の和の確率分布は正規分布に近く、という事実を用いて近似計算を行います。

* 基盤科学系 数学・物理学科目 教授

その結果は

$$p \doteq 0.12676794$$

となります。この方法を解説すると、「その近似値と正確な値との誤差はどれだけなのか」という質問を良く受けます。Excelを使うとこの問題の解を近似せずに、しかも簡単に求められます。まず、Excelの新しいワークシートを作り、A6のマスに「1」と入力した後、B6のマスに「=SUM(A1:A6)」と入力し、B6のマスをコピーしてからB6とCW506を対角線とする長方形に張り付けます。これでCWの列にそれぞれの総和の値(100～600)に対する組み合わせの数が入ります。縦位置を調整してグラフを描くと正規分布曲線が得られ、中心極限定理が再現されます。



この計算を利用すると、最初の問題の解が

$$p = 0.126947761$$

と求まり、上で求めた近似値と小数第三位まで一致することが分かります。少しアレンジすれば、他の様々な問題にも使える方法です。

3. Google

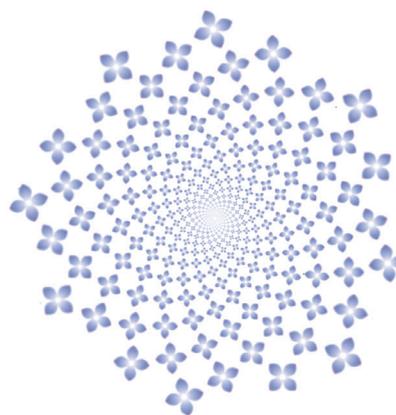
検索エンジン Google にはなかなか高度な計算機能が付属しており、多くの学生が所持しているスマートフォンを手軽な関数電卓として利用できます。例えば、 $\sin(10^\circ)$ を計算したければ、「sin(10度)」または「sin(10deg)」と検索します。逆三角関数の主値 $\text{Arccos}(-0.3)$ を計算して結果を度で得たければ、「acos(-0.3)は何度」「arccos(-0.3) in deg」と検索します。角度の単位は既定ではラジアンが使われますので、ラジアンを用いたいときは単に「度」「deg」に関する部分を省けばよいです。

また、複素数の計算も可能です。例えば「 $e^{i\pi}$ 」を検索すると、正しく「-1」と答えてくれます(オイラーの等式 $e^{i\pi} = -1$)。「 i^i 」を

検索すると実数値 0.207... が表示されます。一見不思議なようですが、これは数学的に正しい値です(i の主値は $e^{-\pi/2} = 0.207 \dots$)。文献[1]によれば、ある数学者は i が実数になることを「私(I)の愛情は realである」と表現したそうです。このような計算を行うとき、Googleを使ってチェックすると安心出来ると思います。

4. GIMP

画像編集ソフトは Adobe 社の Photoshop・Illustrator が有名ですが、フリーソフトの GIMP(GNU Image Manipulation Program)もかなりの高性能を持っています。「人と自然と数学 a」の講義では、GIMPを利用して、G. ヴァン・イターセンが1907年に行った黄金角 137.5° に関する実験(文献[2]参照)を利用したデザインを作る課題を出しました。具体的には、縮小率 r を決めてから、 $n=0, 1, 2, \dots$ について1つの画像を r^n 倍に縮小して $137.5^\circ \times n$ の回転を施したコピーを作成して重ね合わせ、ひまわりのような左右の螺旋形が絡み合った自己相似的なデザインを作成します。一例として、受講者の平居珠実さんの作品を紹介します。元となる花の画像はフリー素材だそうです。



このように、コンピュータ技術を使えば数学講義で習った事実を自分の目で確認し、より深く理解することができます。その意味では、コンピュータは我々の世界から数学の世界を覗くための「窓」と言えるかもしれません。今後もコンピュータ技術の発展に合わせて、講義にどのように採り入れるかを検討していきたいと思っています。

参考文献

- [1] 土基善文, x の x 乗のはなし, 日本評論社, 2002.
- [2] イアン・スチュアート著, 林昌樹・勝浦一雄訳, 生命に隠された秘密, 愛智出版, 2000.