

## 圧縮性流れに対する楕円型解適合格子法\*

山川勝史\*<sup>1</sup>, 松野謙一\*<sup>2</sup>, 里深信行\*<sup>2</sup>Adaptive Grid Method Using Elliptic Equation  
for Compressible Flows

Masashi YAMAKAWA, Kenichi MATSUNO and Nobuyuki SATOFUKA

An adaptive grid method that uses an elliptic equation is developed and applied to shocked flows. In this paper, two improvements are introduced to the adaptive grid method. In the adaptive grid method of the elliptic type, construction of a control function, which is the source term of the Poisson equation and can control the grid distribution, is key to the generation of high-quality grids. Instead of an actual solution, modified solution is used for estimation of the control functions with effective grid control for a shocked region. Grid skewness is one of the problems in the solution adaptive grid method. To avoid severe grid skewness and attain more flexible adaptive gridding, the adaptive grid method is combined with an overset grid method. Overset subgrids are placed in regions where shock waves stand and the adaptive grid method is applied to these subgrids. The applicability of the present method to the supersonic channel flows is demonstrated.

**Key Words:** Computational Fluid Dynamics, Compressible Flow, Grid Generation, Solution-Adaptive Grid, Overset Grid

## 1. 序 論

計算流体力学において流れ場を解析するために格子を形成する必要があるが、この格子により流れ場の計算精度は大きく左右される。そこで適切な格子を形成するということがこの分野での大きな問題点でありその解決策の一つとして解適合格子法がある。

解適合格子とは高い計算精度が求められる領域には密に、それ以外は疎に格子を配置することにより計算効率を高めようというものである。さらに最適は格子を自動で形成できるという利点も兼ね備えている。

解適合格子形成にはさまざまな方法が提案されているが、本論文では物理量の急激な変化をとらえるため、物理量の変化の割合と反比例するように格子間隔を決定する方法をとる。物理量の変化の割合を重み関数で評価し、この重み関数によって一意的に格子間隔が決定されるというものである。

さて、格子形成を行う上で最もなめらかな格子を形成する方法として、Thompsonら<sup>(1)</sup>によって発展さ

せられた楕円型方程式を用いるものがある。この方法では制御関数を用いて格子の位置を決定しているが、この制御関数に解適合の機能を付加させて解適合格子形成を行ったのが文献(2)の楕円型解適合格子法である。文献(2)においては、仮想的な物理量の分布に対して適合格子形成を行っているが、実際の流れへの適用は行われていない。

本論文の目的は、この楕円型解適合格子法をさまざまな実際の圧縮性流れへの適用を行い、いくつかの改良および発展を行うことである。本論文では、まず重み関数に対し擬似分布を利用する方法を提案し、一次元ノズル内流れへの適用を行い有効性を示した。次にこの方法を二次元ダクト内流れへ適用し、解適合格子を形成した。しかし、格子の集中すべき場所(衝撃波部等)が複数に渡り存在する場合、単一の格子では格子の制御に限界がある。特に格子の直交性は大きく崩れ、斜行性が強くなるのが通例である。そこで重畳格子法を併用し、重ね合わせた補助格子上で解適合を行う方法を提案した。

文献(3)では重畳格子法を用いて高精度な衝撃波の獲得を行っているが、本方法ではこれに解適合格子法を結びつけることにより、はるかに少ない格子数でより高精度な解を示すことができた。補助格子の配置を

\* 原稿受付 1995年10月18日。

\*<sup>1</sup> 京都工芸繊維大学大学院(〒606 京都市左京区松ヶ崎御所海道町)。\*<sup>2</sup> 正員、京都工芸繊維大学工学部。

自由に決定できることから衝撃波に対し垂直に配置することにより、比較的直交性の良い適合格子を形成することができ、したがって本解適合格子法の特性を十分生かすことも可能となった。

## 2. 楕円型解適合格子法

**2.1 楕円型解適合格子法** 解適合格子の規準として流れの物理量の変化を含む重み係数  $w$  に対し、格子間隔  $\Delta x$  との積が一定となるように次式を用いた。

$$w\Delta x = \text{const.} \quad \dots\dots\dots(1)$$

計算面  $\xi$  に対応させると、上式は  $w\Delta x/\Delta\xi = \text{const.}$  であり、微分方程式表示すると、

$$wx_\xi = \text{const.} \quad \dots\dots\dots(2)$$

となる。右辺の定数を消去するため  $\xi$  で微分すると

$$x_{\xi\xi} + (w_\xi/w)x_\xi = 0 \quad \dots\dots\dots(3)$$

を得る。

一方、滑らかな格子を形成するため楕円型方程式として Thompson らの提案による、ポアソン方程式を用いる方法がある。その一次元形を次式に示す。

$$\xi_{xx} = \Phi(\xi) \quad \dots\dots\dots(4)$$

式(4)の  $\Phi(\xi)$  は格子点分布を制御する関数であるが、より制御を効果的に行うため Thomas ら<sup>(4)</sup>は、次式

$$\xi_{xx} = \phi(\xi)\xi_x^2 \quad \dots\dots\dots(5)$$

を提案している。本論文では、式(5)で表される楕円型方程式を対象とする。

独立変数と従属変数の役割を交換するため、まずチェーン則より

$$\xi_x = \frac{1}{x_\xi} \Leftrightarrow 1 = \xi_x x_\xi \quad \dots\dots\dots(6)$$

を得る。両辺を  $x$  で偏微分すると、

$$0 = x_{\xi\xi}\xi_x^2 + x_\xi\xi_{xx} \Leftrightarrow \frac{\xi_{xx}}{\xi_x^2} = -\frac{x_{\xi\xi}}{x_\xi} \quad \dots\dots\dots(7)$$

となり、これを式(5)に代入することにより

$$x_{\xi\xi} + \phi x_\xi = 0 \quad \dots\dots\dots(8)$$

を得る。式(3)、(8)の比較により制御関数  $\phi$  は、

$$\phi = \frac{w_\xi}{w} \quad \dots\dots\dots(9)$$

として、重み関数に関連づけられる。

重み関数として、ここではある物理量  $f$  の一階導関数  $f_x$  を用いて、

$$w = \sqrt{1 + b(f_x)^2} \quad \dots\dots\dots(10)$$

と表す。係数  $b$  は通常、ユーザ指定の任意定数である。本論文では隣り合う格子間隔比の最大許容値  $K$  をユーザ指定のパラメータとし、

$$\frac{1}{K} \leq \frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i-1}} \leq K, (\Delta x_i = \Delta x_{i+1} - x_i) \quad \dots\dots\dots(11)$$

のように決めてやる。ただし添字  $i$  は格子番号である。定数  $b$  は式(11)を満足するように自動的に決定される。すなわち  $b$  は次式より計算される<sup>(2)</sup>。

$$b_i = \left(4 \frac{K-1}{K+1}\right) / \left[ |(f_x)^2|_\xi - 4 \frac{K-1}{K+1} (f_x)^2 \right]_i \quad \dots\dots\dots(12)$$

$$b = \min(b_1, b_2, \dots, b_{i_{\max}}) \quad \dots\dots\dots(13)$$

なお2個の物理量 ( $f, g$ ) を取扱う場合重み関数  $w$ 、制御関数  $\phi$  はそれぞれ以下ようになる。

$$w = w_1 w_2 = \sqrt{1 + b_1(f_x)^2} \sqrt{1 + b_2(g_x)^2} \quad \dots\dots\dots(14)$$

$$\phi = \frac{w_\xi}{w} = \frac{w_{1\xi}}{w_1} + \frac{w_{2\xi}}{w_2} \quad \dots\dots\dots(15)$$

**2.2 格子形成** 制御関数が決定されたので、実際に格子形成を行う。まず、式(8)を中心差分を用いて離散化する。ここで、 $\Delta\xi = 1$  とおくと次式を得る。

$$x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1} + \phi_i \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_{i-1}) = 0 \quad \dots\dots\dots(16)$$

最終的に格子は式(16)を解くことにより得ることができ、 $\phi_i$  は格子の位置と強く結びついた関数、すなわち  $x_i$  の関数であり、したがって非線形であるのでここでは緩和法を用いて解く。なお途中段階において格子の移動を小さくするため緩和係数  $\omega$  を1以下(過小緩和法)にて行う。

式(16)に緩和法を適用して次式を得る。

$$\left(1 - \frac{1}{2}\phi_i\right)\delta x_{i-1} + (-2)\delta x_i + \left(1 + \frac{1}{2}\phi_i\right)\delta x_{i+1} = -R_i^n \quad \dots\dots\dots(17)$$

$$x_i^{n+1} = x_i^n + \omega\delta x_i \quad \dots\dots\dots(18)$$

$$R_i^n = x_{i-1}^n - 2x_i^n + x_{i+1}^n + \phi_i \frac{1}{2}(x_{i-1}^n - x_{i+1}^n) \quad \dots\dots\dots(19)$$

**2.3 計算手順** 圧縮性オイラー方程式に対する楕円型解適合格子法の計算手順の一例を以下に示す。ただし、圧力を適合格子形成の重み関数に用いる。

- (1) 初期格子を適当に形成する(例えば等間隔格子)。
- (2) 初期格子上でオイラー方程式を解き、圧力分布を物理量  $f$  とする。
- (3)  $f$  より制御関数  $\phi_i$  を決定する。
- (4) 格子形成方程式(16)を解く。
- (5) 新しく形成された格子分布上での  $f$  を更新する。
- (6) 手続き(3)から(5)を指定した回数まで繰返す。
- (7) 最終的に形成された格子上で、オイラー方程

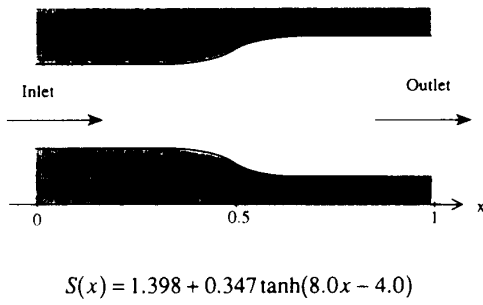


Fig. 1 Nozzle configuration

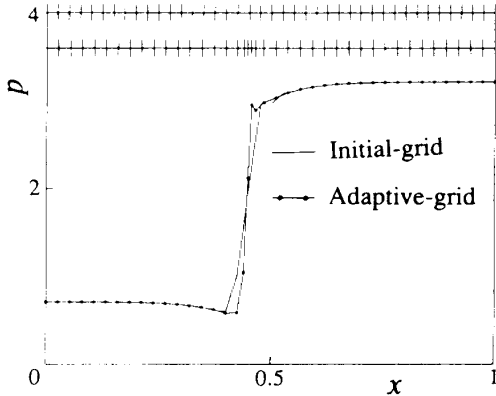


Fig. 2 Initial grid (non-adaptive) and generated adaptive grid of weight function estimated by actual solution

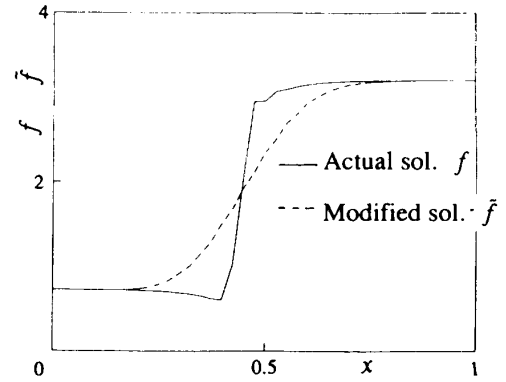


Fig. 3 Actual and modified solutions

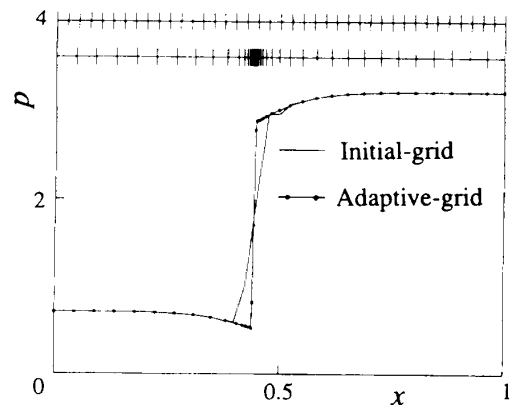


Fig. 4 Adaptive grid generated by use of modified solution

式を再度解く。

### 3. 一次元ノズル内流れへの適用

**3・1 計算条件** 2章で述べた楕円型解適合格子法を非粘性流場、ここでは図1に示すようなノズル内を超音速(マッハ数=2.0)で流入する準一次元ノズル内オイラー流れに適用した。

流れの計算方法として、空間微分項の離散化に関しては、中心差分を用いて評価し、振動を抑えるためにJameson<sup>(5)</sup>により提案された人工粘性項を導入した。時間積分は、陰的解法(Beam-Warming法<sup>(6)</sup>)を用いた。

**3・2 計算結果** 初期格子(等間隔格子)上で求めた圧力分布を基に解適合格子を形成し、形成された解適合格子上での圧力分布を図2に示す。重み関数の構成においては、式(20)に示すような一階および二階導関数を用い、 $f$ に関しては計算された物理量をそのまま用いる方法をとった。ここで式(11)の示すパラメータ  $K$  は  $K=2$  と置いた。なお図2の上段における目盛は、初期格子および解適合格子の格子間隔を表し、格子数はどちらも41である。

$$w = \sqrt{1 + b_1(f_x)^2} \sqrt{1 + b_2(f_{xx})^2} \dots \dots \dots (20)$$

この方法では格子が十分に集中せず、衝撃波部においてわずかに振動が残ってしまった。解のなめらかな部分においてかなりの格子が残ってしまったからである。これは、式(1)よりわかるように、たとえ物理量の変化の起こらない部分( $w=1.0$ )でも、 $\Delta x$ はconstに対応している量だけ格子間隔をもつことになる。よって仮に式(11)のパラメータ  $K$  を大きくしても、衝撃波上にある格子(3~4点)のみが集中するだけで、他の格子はそのまま残ってしまうことになる。

そこで全体にある程度の変化をもつ擬似的な量を作り出し、それを従来からの物理量と組合せて取扱うことを考える。この擬似分布をある程度もとの物理量に依存している値として、図3に示すようなもとの物理量にスムージングを施したものを使用する。スムージングの方法を式(21)に示す。ここで  $f_p$  は、格子点  $i$  の周りに位置する  $N$  個(一次元では2個、二次元では8個)の格子点のうち、 $p$  番めの格子点における物理量を表し、 $\varphi$  はユーザ指定の任意のパラメータである。

$$\tilde{f}_i = \varphi f_i + \frac{1-\varphi}{N} \sum_{p=1}^N f_p \quad 0 \leq \varphi \leq 1 \dots \dots \dots (21)$$

本方法では、このようにして作り出された擬似分布の導関数  $\tilde{f}_x, \tilde{f}_{xx}$  を用いて式(22)のように重み関数の構成を行った。

$$w = \sqrt{1 + b_1(\tilde{f}_x)^2} \sqrt{1 + b_2(\tilde{f}_{xx})^2} \dots\dots\dots(22)$$

この重み関数を用いて解適合格子を形成し、初期格子(等間隔格子)上での解とともに図4に示す、衝撃波の前後に十分な格子が集中しているのを確認することができる。

#### 4. 二次元ダクト内流れへの適用

**4.1 二次元楕円型解適合格子法** 二次元の楕円型解適合格子法では  $\xi$  方向、 $\eta$  方向の格子の制御を同時に行うため、式(23)に示すポアソン方程式を用いた。

$$\begin{aligned} \xi_{xx} + \xi_{yy} &= \phi(\xi, \eta)(\xi_x^2 + \xi_y^2) \\ \eta_{xx} + \eta_{yy} &= \psi(\xi, \eta)(\eta_x^2 + \eta_y^2) \dots\dots\dots(23) \end{aligned}$$

式(23)の独立変数と従属変数の役割を交換して書き換えると以下ようになる。

$$\begin{aligned} \alpha(x_{\xi\xi} + \phi x_\xi) - 2\beta x_{\eta\xi} + \gamma(x_{\eta\eta} + \psi x_\eta) &= 0 \\ \alpha(y_{\eta\xi} + \phi y_\xi) - 2\beta y_{\eta\xi} + \gamma(y_{\eta\eta} + \psi y_\eta) &= 0 \dots\dots(24) \\ \alpha &= x_\eta^2 + y_\eta^2 \\ \beta &= x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta \\ \gamma &= x_\xi^2 + y_\xi^2 \end{aligned}$$

式(24)が本論文で用いる二次元楕円型方程式であり、この式により格子の形成を行うことにする。

さて二次元格子の形成については、格子線が曲線になってしまう。ここでは、文献(2)に従って格子線に沿って前述の方法を適用する。いま  $\eta$  = 一定の格子線に沿って長さ  $s$  をとり、 $\xi$  = 一定の格子線に沿って長さ  $s'$  をとる。このとき式(2)は次のように書き換えられる。

$$ws_\xi = \text{const.} \dots\dots\dots(25)$$

$$w's'_\eta = \text{const.} \dots\dots\dots(26)$$

$$\left(\frac{ds}{d\xi}\right)^2 = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2$$

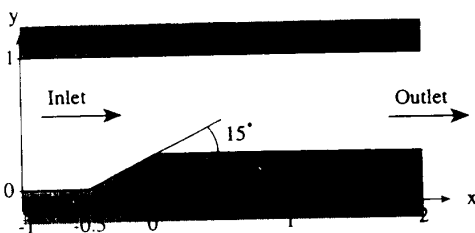


Fig. 5 Two-dimensional duct with compression ramp

$$\left(\frac{ds'}{d\eta}\right)^2 = \left(\frac{dx}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\eta}\right)^2$$

格子間の距離と重み関数の積が一定となるように重み関数を決定する。

制御関数  $\phi, \psi$  については一次元の場合と同様に重み関数を構成する。したがって制御関数  $\phi$  については  $\xi$  方向に式(25)より、 $\psi$  については  $\eta$  方向に式(26)よりそれぞれ決定した。

**4.2 計算条件** 楕円型解適合格子法を、図5に示すような絞り角  $15^\circ$  のダクト内を超音速(マッハ数=2.0)で流入する二次元定常圧縮性流れ場に適用した。

流れ場の計算方法として、空間微分項の離散化においては Roe の FDS(Flux Difference Splitting)法<sup>(7)</sup>を用いたセル中心有限体積法を、時間積分には前進オイラー法を用いた。

**4.3 計算結果** 初期格子として図6に示すような境界から境界までを等間隔に切ったものを使用し

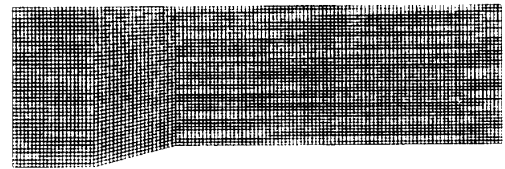


Fig. 6 Initial (non-adapted) grid, 127x44

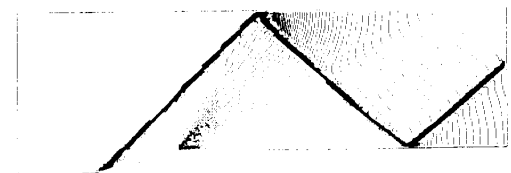


Fig. 7 Non-adaptive grid solution, pressure contours ( $\Delta p=0.05$ )

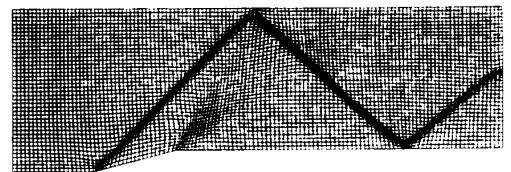


Fig. 8 Solution-adaptive grid.



Fig. 9 Adaptive grid solution, pressure contours ( $\Delta p=0.05$ )

た。この初期格子上での圧力分布の等高線を図7に示す。

次に図7の圧力分布をもとに制御関数を評価し、解適合格子を形成した。重み関数は、準一次元流れへの適用時に十分効果の見られた擬似分布を用いる方法を導入した。なお、擬似分布  $\tilde{f}$  の一階導関数  $\tilde{f}_s$  および  $\tilde{f}_{ss}$  のみを用いても十分効果が見られたので、演算量の削減をも踏まえて式(27)のように構成する。

$$w = \sqrt{1 + b(\tilde{f}_s)^2}$$

$$w' = \sqrt{1 + b(\tilde{f}_{ss})^2} \dots\dots\dots (27)$$

図8に解適合格子を示す。その格子による解を図9に示した。図6に比べより急峻に圧力変化を捕らえられているのを確認することができる。

5. 重畳格子法を用いた解適合格子法

5.1 重畳格子法の導入 4章で行った二次元楕円型解適合格子法では、格子の集中すべき場所が複数あると、格子点の取合いが起こるためユーザ側の需要に対応できるだけの格子の制御を行うことができなかった。つまり、総格子点数を増加させない限りこれ以上の格子点を衝撃波部に集中することは不可能である。また、図8に見られる如く格子の直交性も悪くなっている。そこで格子の集中を行うべき領域を限定させることにより効率よく解適合を行うことにした。そのために重畳格子法を導入し、主格子上に重ね合わせた補助格子に解適合格子法を適用した。

5.2 計算条件 重畳格子法と組合せた解適合格子の形成を、4章で用いた二次元ダクト内流れ(流入マッハ数=2.0)に適用した。

衝撃波全部分を覆うため図10のように主格子上に6枚の補助格子を置いた。格子数は主格子(97×31)、補助格子 I (24×20)、II (11×55)、III (27×14)、IV (11×51)、V (32×15)、VI (11×38)であり、総格子数が4章で用いた単一格子(127×44)の格子数とほぼ同数になるようにした。

ここで補助格子 II, IV, VIにおいて、衝撃波に沿って格子を配置するため、衝撃波に対し平行な方向にの

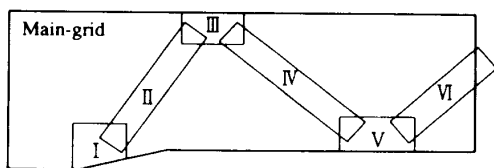


Fig. 10 Schematic layout of the main grid and subgrids in the two dimensional compression duct

み解適合を行うことにした。衝撃波に対し垂直な方向は初期格子のままにとどめるため、格子の制御をつかさどる制御関数に初期格子の情報を取り入れる方法をとる。

初期格子の情報を得るため、式(24)を制御関数  $\phi_{i,j}$ ,  $\psi_{i,j}$  について逆に解くと、

$$\phi_{i,j} = \frac{1}{J} \left\{ y_{\eta} \left( -x_{\xi\xi} + \frac{2\beta}{\alpha} x_{\xi\eta} - \frac{\gamma}{\alpha} x_{\eta\eta} \right) - x_{\eta} \left( -y_{\xi\xi} + \frac{2\beta}{\alpha} y_{\xi\eta} - \frac{\gamma}{\alpha} y_{\eta\eta} \right) \right\}$$

$$\psi_{i,j} = \frac{1}{J} \left\{ y_{\xi} \left( \frac{\alpha}{\gamma} x_{\xi\xi} - \frac{2\beta}{\gamma} x_{\xi\eta} + x_{\eta\eta} \right) + x_{\xi} \left( -\frac{\alpha}{\gamma} y_{\xi\xi} + \frac{2\beta}{\gamma} y_{\xi\eta} - y_{\eta\eta} \right) \right\}$$

$$J = x_{\xi} y_{\eta} - x_{\eta} y_{\xi} \dots\dots\dots (28)$$

を得る。初期格子の  $(x, y)$  分布から、微分  $x_{\xi}, x_{\xi\xi} \dots$  を逆に差分評価し、それを式(28)に代入することにより初期格子を形成する制御関数  $\phi_{i,j}, \psi_{i,j}$  の値が得られる。そ

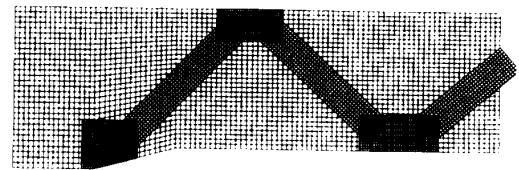


Fig. 11 Overset non adaptive grid (Initial grid)

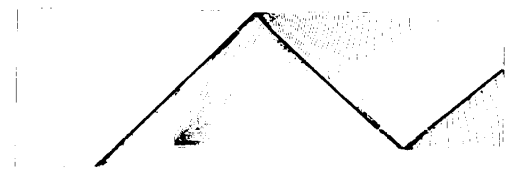


Fig. 12 Overset non adaptive grid solution, pressure contours ( $\Delta p = 0.05$ )

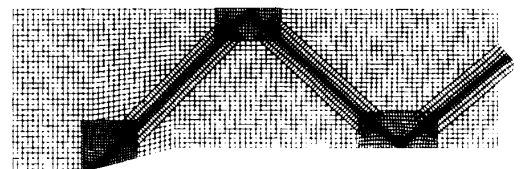


Fig. 13 Generated overset adaptive grid

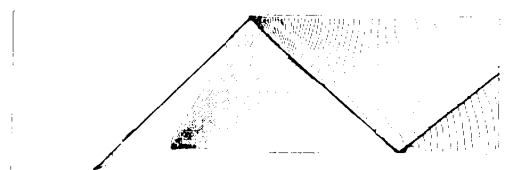


Fig. 14 Overset adaptive grid solution, pressure contours ( $\Delta p = 0.05$ )

れを  $\phi_o, \psi_o$  とする。この  $\phi_o, \psi_o$  および解適合格子法により評価される制御関数  $\phi_a, \psi_a$  を組合せて、新たに制御関数を式(29)のように決定する。

$$\begin{aligned}\phi &= \theta_1 \phi_o + (1 - \theta_1) \phi_a \quad (0 \leq \theta_1 \leq 1) \\ \psi &= \theta_2 \psi_o + (1 - \theta_2) \psi_a \quad (0 \leq \theta_2 \leq 1) \dots\dots\dots (29)\end{aligned}$$

$\theta_1, \theta_2$  は初期格子、および解適合格子のどちらの情報を取り入れるのかを決定するユーザ指定のパラメータである。補助格子 I, III, V に対しては  $\theta_1=1, \theta_2=1$  と置き、補助格子 II, IV, VI に対しては  $\theta_1=1, \theta_2=0$  と置いた。なお式(11)の示す隣接する格子の最大許容格子比  $K$  はすべて  $K=3$  とした。

重畳格子法を用いる際、主格子と補助格子間および補助格子と補助格子間において物理量の補間を行わなければならないが、ここでは重畳格子法に通常用いられる二次元双線形内挿法<sup>6)</sup>を用いた。

**5.3 計算結果** 図 11 に重畳格子法を用いた初期格子、図 12 にこの初期格子を用いて計算させた圧力分布を示す。計算方法は単一格子の場合と同じである。

この初期格子上での圧力分布を用いて補助格子上で解適合格子を形成した。形成された解適合格子を図 13 に、解適合格子上での圧力分布を図 14 に示す。

単一の解適合格子に比べて、さらに急峻な衝撃波を捕らえることができた。この方法では補助格子の形状や格子数を工夫することによって、より優れた格子の形成が期待できる。さらに解適合を行う領域が狭められたことにより、今まで少なからず行ってきた経験や勘に頼ったパラメータ等の指定が簡単に行えるようになった。

## 6. 結 論

本論文では楕円型解適合格子法を圧縮性流れに適用し、発展させた。その結果次のような結論を得た。

(1) 重み関数に流れの物理量  $f$  の擬似分布  $\bar{f}$  を含ませることにより、より効果的な解適合格子を構成することが可能となった。

(2) 制御関数に初期格子の情報を取り入れることにより、解適合格子形成における柔軟性が向上した。

(3) 重畳格子法を取り入れ、重ね合わせた補助格子上で解適合格子を形成することにより、単一格子上での解適合格子に比べさらに鋭い衝撃波がとらえられるようになった。

(4) また、解適合を行う領域を限定することにより、解適合格子形成を格子の直交性を犠牲にすることなく、より容易に行えるようになった。

## 文 献

- (1) Thompson, J. F., Warsi, Z. U. A. and Mastin, C. W., *Numerical Grid Generation*, (1985), 188-237, North Holland.
- (2) Matsuno, K. and Dwyer, H. A., *JCP*, **72**(1988), 40-52.
- (3) Kao, K. H., ほか 2 名, *AIAA*, 93-3389 CP, (1993), 990-1001.
- (4) Thomas, P. D. and Middlecoff, J. F., *AIAA J.*, **18**(1980), 652.
- (5) Jameson, A. and Baker, T. J., *AIAA Paper*, 83-1929 (1983).
- (6) Beam, R. M. and Warming, R. F., *AIAA J.*, **16**(1978), 393-402.
- (7) Roe, P. L., *LCP*, **43**(1981), 357-372.
- (8) 小幡正規・ほか 3 名, *機論*, **59**-562, B(1993), 220-226.