

非構造移動格子有限体積法*

(第3報, 非定常問題に対する格子細分化非構造解適合格子形成法)

山川勝史*¹, 松野謙一*¹An Iterative Finite-Volume Method on an Unstructured Moving Grid
(3rd Report, Unstructured Adaptive Mesh Refinement Method
for Unsteady Problems)Masashi YAMAKAWA*² and Kenichi MATSUNO*² Department of Mechanical and System Engineering, Kyoto Institute of Technology,
Gosyokaido-cho, Matsugasaki, Sakyo-ku, Kyoto-shi, Kyoto, 606-8585 Japan

A new adaptive mesh refinement method for unsteady compressible flow is presented in this paper. For unsteady flow problem, the solution-adapted grid is also dynamically changing its shape at every time step according to the flow change since the flow is non-stationary. For the present solution-adapted grid method, two grid cells are merged into one grid cell and one grid cell is divided into two grid cells according to a criterion of grid adaption in a time-dependent way in unstructured grid system. In this case, it is important to assure geometric conservation law as well as physical conservation law on such the grid system. Therefore, we adopt a finite volume method in which a control volume on the space-time unified domain for estimating numerical flux. The method is described and applied for two-dimensional unsteady compressible flows.

Key Words: Computational Fluid Dynamics, Compressible Flow, Unsteady Flow, Unstructured Mesh, Solution-Adapted Grid Method

1. 緒 論

近年, 計算機が著しい発達を遂げたとはいえ, より詳細な流れ場を計算するには莫大な時間と計算機容量が必要となる. この問題に対する有効な手法の一つとして解適合格子形成法がある. 解適合格子形成法は流れ場の重要な部分 (例えば圧縮性流体における衝撃波部) の計算格子を密に, それ以外を疎に配置することにより計算効率向上を狙ったものである. 特に定常問題に対しては, 格子線を移動させる方法^①, 格子を局所的に細分化する方法^②, また重畳格子法と組合せることでより効率を高める方法^③等様々な方法が提案されており, ほぼ実用の域に達していると言えよう.

一方, 非定常問題に対し解適合格子を形成する場合には幾つか注意すべき項目があり, その一つに幾何保存則が挙げられる. 通常, 非定常問題では時間と共に解が変化し, その解の変化に合わせて解適合格子も時々刻々と変化することになる. この場合, 幾何保存則^④が満足されていなければ, 時間と共に変化する

格子が流れ場に影響を与え, 結果的に計算誤差が蓄積, または計算不能に陥る可能性が高くなる. この幾何保存則の崩壊を回避する手段として, 著者らは時間-空間を合わせたコントロールボリュームを形成し, その時間と共に変化する検査体積について幾何保存則を満たすように離散化した非構造移動格子有限体積法^⑤を提案している. つまり本手法に解適合格子を付加させることで, 非定常問題に対し幾何保存則を満足させた解適合格子形成を行うことが可能になると考えられる. 非定常問題に対し解適合格子を行う手法^⑥は多々あるが, 本論文のように幾何保存則についてまで言及したものは確認していない.

さて, 非構造格子を用いて解適合格子を形成する場合, 格子細分化法は効率良く格子点を配置できることから非常によく用いられている. 格子を密にする箇所では格子点を追加 (要素を分割) し, 格子を疎にする箇所では格子点を消滅 (要素を結合) させるものである. ただしこの格子細分化法を非定常問題で行うためには, 時間と共に格子点を追加および消滅させても物理および幾何保存則を同時に満足させる必要が生じるが, これに対しては著者らが前報^⑦にて定式化した手法を応用することとする.

* 原稿受付 2005年3月14日.

*¹ 正員, 京都工芸繊維大学工学学部 (〒606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所海道町).

E-mail: yamakawa@kit.ac.jp

本論文では二次元非粘性圧縮性流れを対象に、まず格子点の追加・消滅を伴う非構造移動格子有限体積法の定式化を簡単に示し、検証問題、実用問題を通して本手法の有効性を示す。

2. 非構造移動格子有限体積法

非定常問題に対し格子細分化法を用いた解適合格子を形成する場合、時間と共に格子点を追加・消滅させることとなる。この時、常に幾何保存則を満たすよう離散化された非構造移動格子有限体積法は以下のようなになる。ただし、詳細は文献⁹⁾に委ねるとし、ここではその概要を記述するに留める。

まず流れの基礎式として式(1)に示すように、発散形表示させた二次元オイラー方程式を用いる。

$$\tilde{\nabla} \tilde{F} = 0 \tag{1}$$

ここで $\tilde{\nabla}$ は $(\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial t)$ 、 \tilde{F} は (E, F, q) であり、 E, F は x 方向、 y 方向の流束ベクトル、 q は保存量ベクトルを示している。次に幾何保存則を満たすように、式(1)を時間-空間に跨るコントロールボリュームについて体積積分する。本論文ではセル中心法を採用するので、検査体積は図1に示すような五面体となる。

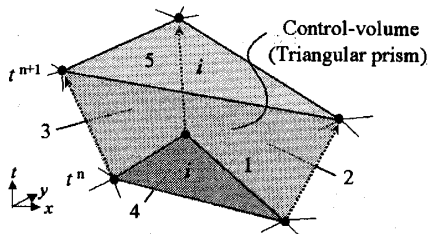


Fig.1 Control volume in space-time unified system

式(1)をこのコントロールボリュームについて体積積分し、さらにガウスの発散定理を用いて次のように変形する。

$$\int_V \tilde{\nabla} \tilde{F} dV = \oint_S \tilde{F} \cdot n dS = \sum_{\ell=1}^5 (En_{\ell x} + Fn_{\ell y} + qn_{\ell t}) = 0 \tag{2}$$

ここで $n_{\ell} = (n_{\ell x}, n_{\ell y}, n_{\ell t})$ 、 $(\ell = 1, 2, \dots, 5)$ は五面体の ℓ 番目の表面に対する外向き法線ベクトルである。また第4面および第5面は時間軸に対し垂直であることから、具体的に解くべき離散式は以下のようなになる。

$$q^{n+1}(n_t)_5 + q^n(n_t)_4 + \sum_{\ell=1}^3 \{ (E^{n+1/2}, F^{n+1/2}, q^{n+1/2}) \cdot n_{\ell} \} = 0 \tag{3}$$

本式は時間経過と共に格子が移動する場合である。これに対し格子点を追加する場合、つまり要素を分割する場合は次のようになる。まず検査体積を図2に模式的に示す。

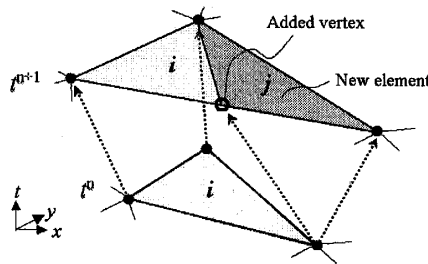


Fig.2 Control volume with addition of element

一つの要素を二つに分割する場合、一本の格子線の上に格子点が追加されることとなり、その結果要素 i は i および j に分割される。よって要素 i は時間 n 段階および $n+1$ 段階に挟まれた五面体(要素 i)について、また要素 $i+1$ は両段階に挟まれた四面体(要素 j)についてそれぞれ体積積分されることになる。五面体については式(3)に示す離散式を解くこととなる。一方四面体については、 n 段階で面積 0 である要素が、 $n+1$ 段階で格子点の追加により作成された要素を持つことになる。これは式(3)における $(n_t)_4 = 0$ と見なすことが出来、よって式(3)は次式のように表すこととなる。

$$q^{n+1}(n_t)_5 + \sum_{\ell=1}^3 \{ (E^{n+1/2}, F^{n+1/2}, q^{n+1/2}) \cdot n_{\ell} \} = 0 \tag{4}$$

また、格子点が消滅、つまり要素を結合する場合には n 段階で結合すべき隣接する要素 i および j を合わせて取り扱うこととなる。この場合対象となる検査体積は、図3に示す六面体となる。解くべき離散式については n 段階で二つの要素を合わせ、具体的に式(5)のように表すことになる。

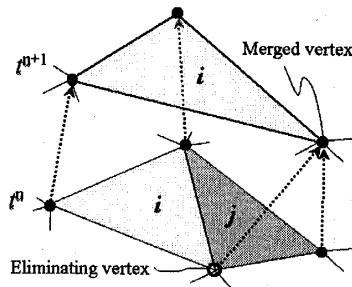


Fig.3 Control volume with elimination of element

$$q_i^{n+1}(n_t)_6 + q_i^n(n_t)_5 + q_j^n(n_t)_5 + \sum_{l=1}^4 \left\{ (E^{n+1/2}, F^{n+1/2}, q^{n+1/2}) \cdot \mathbf{n}_l \right\} = 0 \quad (5)$$

最終的に解くべき式(3), (4), (5)は陰的スキームであることから擬似時間内部反復法⁽¹⁰⁾を用い, 擬似時間の進行にはRRK法を用いた(詳細は文献⁽⁶⁾を参照されたい). また, 各式における非粘性流束ベクトルの評価はRoeのFDS法⁽¹¹⁾を用い, Venkatakrishnan⁽¹²⁾により提案された制限関数を使用した.

3. 解適合格子形成法の計算手順

格子点の追加・消滅を伴う非構造移動格子有限体積法を応用した解適合格子形成法について, その計算手順を以下に記述する.

<手順1> n 時間段階の物理量を用いて解適合の判断基準を決定する. 本論文ではセル中心法を採用しているため, ここでは隣接する要素間の物理変化量(物理量の一階導関数)を各要素間について計算する. 物理変化量がユーザー指定の敷居値を越え, 分割すべき要素と判断した場合, 隣接する両方の要素に印(印A)を付ける. 同様に物理変化量がもう一つの敷居値を下回り, 結合すべき要素と判断した場合には, 両方の要素に別の印(印B)を付ける. なお, 一つの要素に印Aと印Bが同時に付いてある場合, 印Aを優先させる.

<手順2> 全ての要素について<手順1>を施した後, 印Aの付いている要素について分割を実行する. ここでも分割数を2とするため, 隣接する2つの要素が同時に分割されることになる. ある要素について隣接する複数の要素に印Aが付いていれば, その中で分割後の扁平率が最も小さいもの(最も歪みが小さいもの)を選択する. ただし分割する要素の面積が指定値(最小要素面積)を下回る場合, 分割は行わない. また, 印Bの付いている要素について結合を行う. 分割時と同様に隣接する要素と結合されるが, ここでも結合後の形状について扁平率の小さいものを選択する. また結合する要素の面積が指定値(最大要素面積)を上回る場合, 結合は行わない.

<手順3> 全ての分割および結合が完了すると, 歪んだ要素に対し修正を行う. 具体的には図4に示すように隣接する2要素間で, その境界線を入れ替える. ただし本手順においても幾何保存則を十分に考慮する必要が生じる. つまり, 図5に示すように単

に要素を回転させるだけでは幾何保存則が壊れてしまう. これは時間-空間に跨るコントロールボリューム(六面体)の側面における法線ベクトルと, 六面体に隣接するコントロールボリュームの側面の法線ベクトルとの間に互換性が保てなくなり, その結果評価が正確にできなくなるからである.

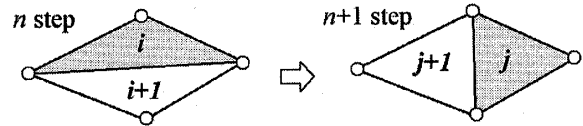


Fig.4 Replacement of a side line

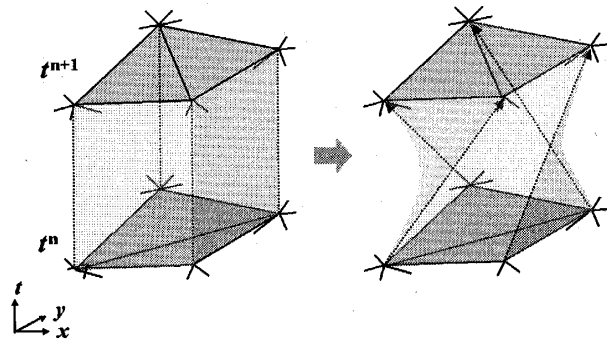


Fig.5 Mistaken method for replacement of a side line

そこで, 境界線の入替は次のようにして行う. まず n 時間段階における境界線を入れ替える要素を i および $i+1$ とする. そして図6に示すように $n+1$ 時間段階において要素 i は変形し要素 $i+1$ は消滅するとする. また $n+1$ 時間段階において新たに要素 j が発生する. つまり要素を i および $i+1$ を形成する六面体と, 要素 j を形成する四面体を組み合わせたコントロールボリュームについてそれぞれ有限体積法を適用することになる. これにより境界線を入れ替えるコントロールボリュームについてその側面の法線ベクトルを正しく評価することができ, 結果, 幾何保存則を満たすことができる.

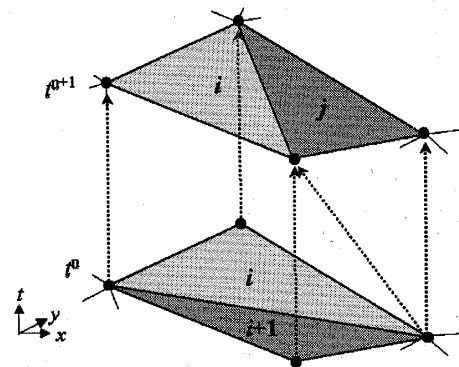


Fig.6 Control volume for replacement of a side line

具体的に解くべき離散式については、まず、 n 段階で要素を i および $i+1$ を併せた六面体について次式のように表すことになる。

$$q_i^{n+1} \{(n_t)_8\}_i + q_i^n \{(n_t)_7\}_i + q_{i+1}^n \{(n_t)_7\}_j + \sum_{\ell=1}^4 \{(E^{n+1/2}, F^{n+1/2}, q^{n+1/2}) \cdot \mathbf{n}\}_\ell = 0 \quad (6)$$

また、要素 j については次式となる。

$$q_j^{n+1} (n_t)_8 + \sum_{\ell=1}^6 \{(E^{n+1/2}, F^{n+1/2}, q^{n+1/2}) \cdot \mathbf{n}\}_\ell = 0 \quad (7)$$

ここで、上式で用いた数字 (1~8) は図6のコントロールボリュームに対し、8が上底、7が下底、1~4は六面体の側面、4~6は四面体の側面を示しており、4は六面体と四面体が接する境界面である。結果的に、六面体は格子点が消滅する式(5)に一致し、四面体は格子点が追加される式(4)に一致するため、プログラミングはこれらを用いると容易に行うことができる。

<手順4> 上記手順で形成された格子について、より滑らかな格子とするため次式に示すラプラシアン法を用いてさらに格子の修正を行う。

$$V(i) = \frac{1}{2N} \sum_{j,k} \{V(j) + V(k)\} \quad (8)$$

ここで i, j, k は一つの三角形の3頂点であり、 $V(i), V(j), V(k)$ はそれぞれ3頂点の座標値を、 N は点 i を共有する三角形の個数を示す。これは点 i を、その点を頂点とする全ての三角形の面積の重心位置へ移動させることを示している。ただしこの<手順4>は毎時間段階行くと格子が鈍りすぎるため、実際には10から15時間段階程度毎に行うこととする。

<手順5> 以上の手順で解適合格子が形成されるので、この新たな格子上で内部反復計算を行い物理量を更新する。本来、内部反復段階においても手順1から4を繰り返すべきであるが、収束性が悪く時間効率が良くないので、ここでは格子の更新を各時間段階について一回のみとする。

4. スキームの検証

まず本スキームが幾何保存則を満足しているかを検証するため、格子細分化非構造解適合格子を模擬した図7に示すような計算格子に対し、一様流の捕捉を行った。計算領域は一辺の長さが1.0である正方形であり、要素数は初期状態で736である。この計算格

子は、時間と共に式(9)に示す範囲内に要素の中心座標 (x_c, y_c) が存在する要素に対しその要素を分割、また範囲外に中心座標のある要素は結合させたものである。

$$\begin{aligned} 0.1t - 0.05 \leq x_c \leq 0.1t + 0.05 \\ 0.1t - 0.05 \leq y_c \leq 0.1t + 0.05 \end{aligned} \quad (9)$$

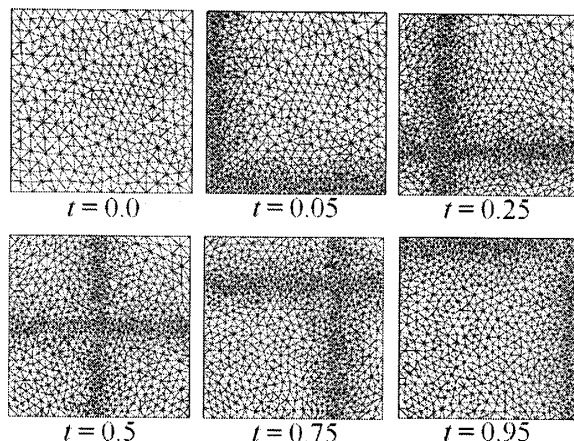


Fig.7 Change of grids for test problem

初期状態として、全要素に一様流 $\rho_\infty = 1.0, p_\infty = 1.0/\gamma (\gamma = 1.4), u = 1.0, v = 1.0$ を与え $t = 10.0$ (時間刻み幅 0.01 で 1000 時間ステップ) まで計算を行った。

図8に密度に対する初期値との誤差履歴を示す。また誤差は式(10)のように定義した。結果、初期値との誤差は 10^{-16} (マシンゼロ) レベルであったことから、本手法が幾何保存則を十分満足していることを確認することができる。

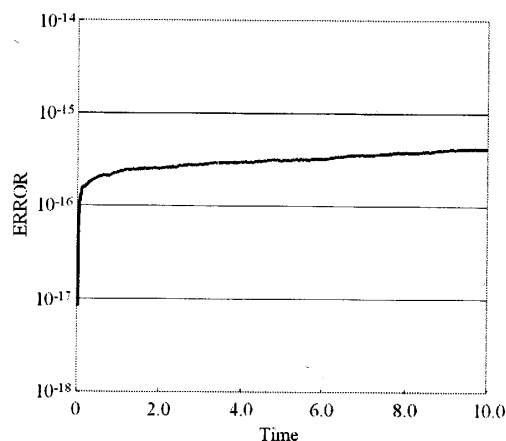


Fig.8 History of ERROR of density

$$ERROR = MAX \left\{ \left| \frac{\rho - \rho_\infty}{\rho_\infty} \right|_i \right\} \quad (10)$$

5. 実用問題への適用

5・1 衝撃波管問題 本手法の実用問題への適用として、図9に示すような衝撃波管問題を取り扱う。これはシリンダ内に高圧気体と低圧気体を隔てている隔膜を針で突いて破ると、高圧気体が低圧気体側へ一気に流れ込み、低圧気体を急激に圧縮することで衝撃波が発生するというものである。

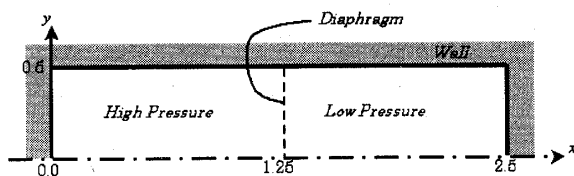


Fig.9 Shock-tube problem

初期条件として、隔壁の左側に密度 $\rho=1.0$ 、圧力 $p=1.0/\gamma$ ($\gamma=1.4$)、速度 $u=0.0$ 、 $v=0.0$ を、右側に $\rho=0.1$ 、圧力 $p=0.1/\gamma$ 、速度 $u=0.0$ 、 $v=0.0$ を与え、 $t=0.0$ で隔壁を瞬時に取り除いた後の流れ場について計算を行う。初期格子は図10に示すようなデローニー分割法を用いて形成した。格子数は1000(要素数1862)で、 $t=2.5$ (時間刻み幅0.00125で2000時間ステップ)まで計算する。

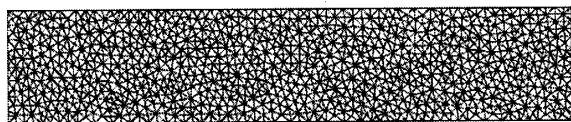


Fig.10 Initial grid

隔壁を取り除いた直後、隔壁位置から発生した衝撃波は右側へ、発生した膨張波は左側へそれぞれ進行する。右端壁へ到達した衝撃波は壁面で反射後、強い衝撃波となり左側へ向かって進む。本論文では衝撃波が右端壁にて反射後の流れ場について解適合格子形成を行った。

図11に計算結果を示す。各時間段階において、上段が形成した解適合格子を、下段が形成された解適合格子上の流れ場(圧力分布)を示している。部分的に不必要な格子の細分化箇所が見られるものの、衝撃波部には十分に格子を細分化できており、急峻な圧力変化を捕らえられていることを確認することができる。また移動する衝撃波にあわせて格子の細分化および結合を繰り返し行っている。その結果衝撃波の移動に追従してあたかも細分箇所が移動しているように見え、常に衝撃波部に高密度な格子を配置できている。なお衝撃波部の格子点数は細分

化により増加しているものの、流れの緩やかな部分において格子を結合させ減少させていることから、総格子点数はほとんど変化していない。

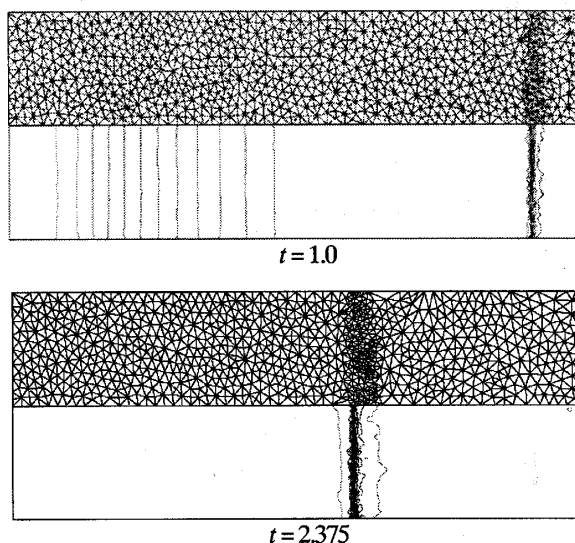


Fig.11 Grids and pressure contours for shock-tube problem
(Upper: Adaptive grid, Lower: Pressure contours)

5・2 円柱爆縮問題 次に本手法を図12に示すような円柱爆縮問題に適用した。これは衝撃波管問題の隔壁を円形に配置したものであり、隔壁の外側部分に高圧気体が、内側部分に低圧気体がそれぞれ充填されている。隔壁を取り除くと同時に高圧側の気体が低圧側へ流れ込み、円形の衝撃波が発生する。衝撃波は円柱の中心に向かって、また膨張波が外側へ向かってそれぞれ進む。衝撃波は中心に到達すると強度を増し外側へと広がっていく。

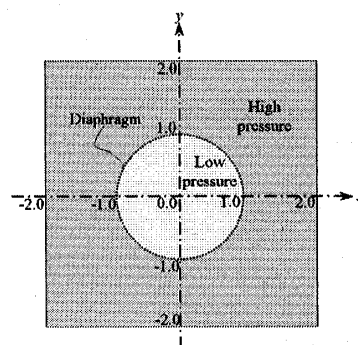


Fig.12 Cylindrical implosion problem

初期条件として、隔壁の外側に密度 $\rho=1.0$ 、圧力 $p=1.0/\gamma$ ($\gamma=1.4$)、速度 $u=0.0$ 、 $v=0.0$ を、内側に $\rho=0.1$ 、圧力 $p=0.1/\gamma$ 、速度 $u=0.0$ 、 $v=0.0$ を与え、 $t=0.0$ で隔壁を瞬時に取り除いた後の流れ場について計算を行う。

要素数 1895 で, $t=1.25$ (時間刻み幅 0.00125 で 1000 時間ステップ) まで計算する。

図 13 に計算結果を示す。各時間段階において, 右側が形成した解適合格子を, 左側が形成された解適合格子での流れ場 (圧力分布) を示している。衝撃波および膨張波 (初期段階: $t=0.55$ まで) に対し個別に格子の細分化ができており, それぞれの波の移動にあわせて適切な位置に格子の細分化・結合を自動で行うことで, スムーズな格子の細分化位置 (高密度部分) の移動が実施できていることを確認できる。

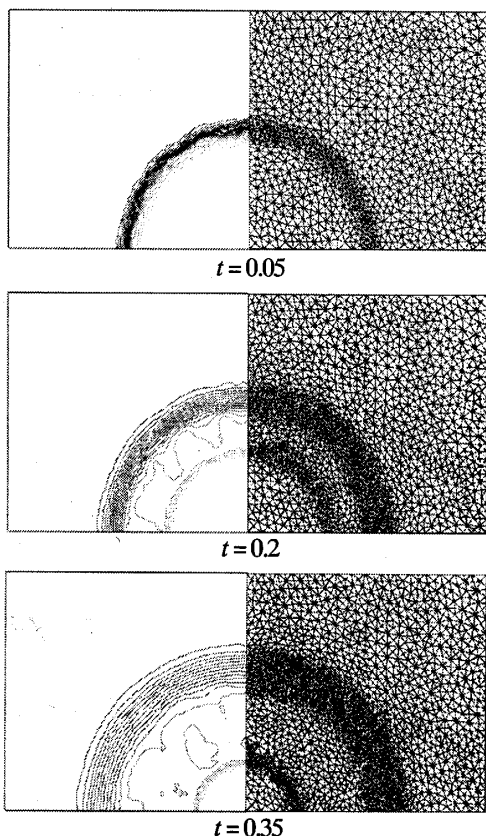


Fig.13 Grids and pressure contours for cylindrical implosion problem(Upper : Adaptive grid, Lower : Pressure contours)

本ケースの場合, 膨張波部分についてもある程度格子を細分化しているため, 途中段階において要素数は 2 倍程度 (最大要素数: 3672) まで増加しているが, 衝撃波部, 膨張波部において要素面積を 1/10 程度まで小さくしている。その結果 2 倍の要素数により 10 倍の分解能を得ていることになる。また格子の細分箇所が複数 (衝撃波および膨張波) 存在しているが, 格子の移動による解適合格子形成時に見られた取り合いによる計算格子の部分疎化も無く, 良好な格子を形成できていることを確認することが

出来る。尚, 本ケースにおける総計算時間は解適合格子を行わない (格子が変化しない, つまり幾何保存則を考慮しない) 場合と比較して約 4 倍である。

衝撃波管問題も含め 2 ケースについて本手法を適用しそれぞれに良好な結果を得たことから, 本手法が非定常流れに対する有効な解適合格子形成法であることを示せた。

5. 結 論

非構造移動格子有限体積法を発展させ, 解適合機能を付加させることで, 非定常流れに対する新しい解適合格子形成法を提案した。本手法を幾つかの検証問題へ適用した結果以下の結論を得た。

- (1) 非定常流れにおいて, 幾何保存則を完全に満足したまま, 時間と共に格子点が追加・消滅する格子細分化非構造解適合格子形成法を構築した。また検証問題を通して本手法が完全に幾何保存則が満足されていることを確認した。
- (2) 実用問題として衝撃波管問題に適用し, 衝撃波の移動に合わせて格子点を追加・消滅させることで, 急峻な衝撃波の捕獲を確認したことから, 本手法の有効性を示した。
- (3) また, 円柱爆縮問題では複数の物理量急変部に対し, 的確な格子細分化を確認した。本ケースにおいては総要素数を 2 倍程度増加させることで約 10 倍もの計算精度を得ることが出来た。

参考文献

- (1) K. Nakahashi, AIAAJ, 25-4(1987), 513-520
- (2) M. J. Berge, CFD2000, (2000), 337-342
- (3) 山川勝史他 2 名, 機論, 63-609, B(1997), 1597-1603
- (4) 松野謙一, 数値流体力学学会誌, 3-2(1995), 103-114
- (5) K. Matsuno 他 2 名, CFD2000, Springer, (2001), 705-710
- (6) 山川勝史他 1 名, 機論, 69-683, B(2003), 1577-1582
- (7) 高橋克明他 1 名, 機論, 67-664, B(2001), 2946-2954
- (8) R. LOHNER, International Journal for Numerical Methods in Fluids 14(1992)1407-1419
- (9) 山川勝史他 1 名, 機論, 70-689, B(2004), 25-30
- (10) C.L. Rumsey 他 4 名, Comp. and Fluids, 25, (1996), 217-236
- (11) Roe, P. L., JCP, 43(1981), 357-372
- (12) Venkatakrishnan V. (1993), AIAA Paper 93-0880