

複素リカレントニューラルネットワークの大域的安定性解析と 凸計画問題への応用

吉田 光男[†] 森 武宏^{†a)}

Global Stability Analysis for Complex-Valued Recurrent Neural Networks
and Its Application to Convex Optimization Problems

Mitsuo YOSHIDA[†] and Takehiro MORI^{†a)}

あらまし 本論文では、離散時間または連続時間で動作し、複素数値の変数やパラメータをもつ複素リカレントニューラルネットワークを対象にした安定性解析を行う。すなわち、リアプノフ関数を導く複素ニューロンの活性化関数として複素関数のクラスを定義し、対象ネットワークのそれぞれの大域的漸近安定性条件を導出する。また、ネットワークとその大域的漸近安定性条件の有効な応用例として、凸計画問題への適用例を示す。

キーワード 複素リカレントニューラルネットワーク、離散時間ネットワーク、連続時間ネットワーク、大域的漸近安定性条件、凸計画問題

1. ま え が き

ニューラルネットワークは脳の情報処理機能を模倣したシステムであり、分散的かつ柔軟な情報処理の実現を目指している。そして、これまで様々なネットワークのモデルが提案され、その動作の解析や応用についての研究が盛んである。ニューラルネットワークによって実現される情報処理のうち連想記憶と最適化を実現するネットワークは、J. J. Hopfield によって提案されたモデル [1] ~ [3] に代表されるリカレントニューラルネットワーク（相互結合型ニューラルネットワーク）である。リカレントニューラルネットワークは、フィードバック構造を有し、ネットワークの状態が時間とともに変化する動的システムである。ニューラルネットワークによって連想記憶を実現する場合、記憶させた情報を正しく想起させるように、記憶情報をネットワークの安定な平衡点と対応させる。そのため平衡点の局所的漸近安定性条件を明らかにし、この条件を利用したネットワークの設計法が提案されて

いる [4]。また、ニューラルネットワークによって最適化問題の解を導く場合、局所的または大域的最適解がネットワークの平衡点または平衡集合と対応する。したがって、ニューラルネットワークによって最適解を得るために、ネットワークの状態が常に平衡点または平衡集合へ収束することが求められる。あるいは、ネットワークによって導かれる解が局所的最適解であるか大域的最適解であるかを判別するために、平衡点の大域的漸近安定性を明らかにすることが求められる。この問題に関しては活発に研究がなされいくつかの理論的な結果が明らかにされている [5] ~ [9]。

一方、上述のネットワークが専ら実数値を扱うのに対して、複素数値の変数とパラメータをもつニューラルネットワーク（複素ニューラルネットワーク）が提案されている [10] ~ [14]。電磁波や光波を扱う信号処理においては、問題が複素数で記述される場合があり、このような問題に対してニューラルネットワークが行う情報処理は非常に有効である。更に、複素ニューラルネットワークは、従来の実数ニューラルネットワークを含む上、実数ニューラルネットワークにはない特徴が存在するとの報告があり、ネットワークの情報処理能力に高い期待がもたれ、その能力についての研究が行われている [10]。ニューラルネットワークでは、ニューロンにおける信号の非線形変換処理を表現

[†] 京都工芸繊維大学工学部電子情報工学科，京都市
Department of Electronics and Information Science, Kyoto
Institute of Technology, Matsugasaki Sakyo-ku, Kyoto-shi,
606-8585 Japan

a) E-mail: mori@kit.ac.jp

する関数（活性化関数）をいかに定義するかが、結合荷重係数の設定と並んでネットワークの動作を決定づけ、その能力を左右する大きな要素となる。特に、複素ニューラルネットワークでは活性化関数は複素関数であり、実数ニューラルネットワークの場合と比べて様々な関数を考えることができる。そして、複素ネットワークの場合には、ネットワークの性質や応用と関連した活性化関数の考察はとりわけ重要であり、検討が待たれている。

複素ニューラルネットワークの中で、リカレントニューラルネットワークに関しては、複素領域でのエネルギー関数を構成し、それを利用したネットワークの局所的漸近安定性条件の導出と、複素連想記憶の実現が試みられている [13]。また [14] では連続時間で動作するリカレントニューラルネットワークに対する大域的漸近安定性条件が導かれ、その一つの応用例が示されている。しかし、一般には、複素リカレントニューラルネットワークの最適化問題への応用の可能性やネットワークの大域的漸近安定性についての理論的な考察はまだ十分な研究がなされていないようである。本論文の目的はここにあり、離散時間複素リカレントニューラルネットワークを対象に、リアプノフ関数を導く離散時間複素ニューロンの活性化関数として、ネットワークの性質や応用を考慮した適切な複素関数のクラスを定義する。そして、それをを用いたネットワークの大域的漸近安定性条件を導出する。また、離散時間ネットワークは連続時間ネットワークの近似システムとなり得ることから、両ネットワークの安定性条件について何らかの関係があると期待できる。この一つの例として、与えられたネットワークパラメータと活性化関数に対して、適当な条件のもとで、同一の大域的漸近安定な平衡点をもつ離散時間、連続時間ネットワークが存在することを示す。また、その目的のために、本論文で定義した複素関数のクラスに含まれる活性化関数をもつ連続時間複素リカレントニューラルネットワークに対する大域的漸近安定性条件をも導出する。更に、複素リカレントニューラルネットワークとその大域的漸近安定性条件の応用として、最適化問題の一種である凸計画問題への適用例を示す。

本論文の構成は次のようである。次章では離散時間と連続時間ニューラルネットワークのモデルを示し、その活性化関数のクラスを定義する。3. は本論文の主要な結果であり、複素ネットワークの大域的漸近安定性条件を示す。証明は付録にゆだねられている。4. で

は得られた条件の凸計画問題への応用例を示し、6. で論文を締めくくる。

なお、本論文では、 $\mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbb{C}^{n \times m}$ はそれぞれ実数、複素数 $n \times m$ 行列の全体、 I_n は $n \times n$ の単位行列を表す。 $x \in \mathbb{C}$ に対し、 $|x|$ は x の絶対値、 \bar{x} は x の複素共役、 $Re(x)$ または x^R は x の実数部、 x^I は x の虚数部、 $\langle x, y \rangle = \bar{x}y$ は二つの複素数 x, y に対する内積である。行列 $X \in \mathbb{C}^{n \times m}$ に対し、添字 t は行列またはベクトルの転置、添字 $*$ は行列またはベクトルの複素共役転置を示し、 $\|x\|$ はベクトル $x \in \mathbb{C}^n$ のユークリッドノルム ($\|x\|^2 = x^*x$) とする。また、 $|X|$ は $X \in \mathbb{C}^{n \times m}$ のすべての要素に対して絶対値をとった行列またはベクトルを表し、 $X > 0$ は行列 $X = X^*$ が正定値行列であることを表す。また、実正方行列 X が M 行列であるとは、 X の非対角要素が非正であり、 X の主座小行列式がすべて正であるときをいう。

2. 複素ニューラルネットワーク

本論文では、離散時間または連続時間で動作し、複素数値パラメータと複素数値変数を含む複素リカレントニューラルネットワークを対象にする。対象とする離散時間ネットワークは次の差分方程式によって記述される。

$$\begin{cases} u[k+1] = Au[k] + Wv[k] + b \\ v[k] = f(u[k]) \end{cases} \quad (1)$$

また、連続時間ネットワークは次の微分方程式によって記述される。

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = -Du(t) + Wv(t) + b \\ v(t) = f(u(t)) \end{cases} \quad (2)$$

ただし、ネットワークを構成するニューロンの個数は n とし、 $u = [u_1, u_2, \dots, u_n]^t$, $v = [v_1, v_2, \dots, v_n]^t \in \mathbb{C}^n$ はそれぞれニューロンの状態と出力、 $b \in \mathbb{C}^n$ はニューロンへの外部定数入力、 $W \in \mathbb{C}^{n \times n}$ は結合荷重行列、 $A = \text{diag}\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $D = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_n\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ はニューロンの自己抑制係数であり、 $|a_i| < 1$, $d_i > 0$ とする。また、 $f(\cdot) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ は複素ニューロンの活性化関数であり、 f の要素である $f_i(\cdot) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ は次に定義する複素関数のクラス \mathcal{F}^{lm} に属すると仮定する。

[定義 1] 以下の条件を満たす複素関数 $f_i(\cdot)$ の集合をクラス \mathcal{F}^{lm} と定義する。

1. $f_i(0) = 0$ である .
2. 有界である .
3. $|f_i(x_i) - f_i(y_i)| \leq l_i |x_i - y_i|$ ($\forall x_i, y_i \in \mathbb{C}$) を満たす実数 $l_i > 0$ が存在する .
4. $\operatorname{Re}\langle x_i - y_i, f_i(x_i) - f_i(y_i) \rangle \geq 0$ ($\forall x_i, y_i \in \mathbb{C}$) を満たす .

なお、クラス \mathcal{F}^{lm} に属する関数は有界な関数であり、「有界で正則な関数は定数に限る」というリュービルの定理により、クラス \mathcal{F}^{lm} では非正則関数を想定している [10], [13], [14] . また、定義 1 の条件 4 は、複素関数を $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ のベクトル値写像とみなしたとき、写像の単調性を意味している . 更に、このクラスは次に示すように最適化問題の定式化に適した一般的な関数である . クラス \mathcal{F}^{lm} に属する関数として、例えば、複素平面上で、原点を含む任意の有界な閉凸集合を $S_i \subset \mathbb{C}$ と定義した時、次式のような関数が挙げられる .

$$\psi_{S_i}(u_i) = \arg \min_{z_i} \{|u_i - z_i| \mid z_i \in S_i\} \quad (3)$$

この関数は、数理計画法の分野で利用される射影（または、凸射影）[16] と呼ばれる関数であり、実数ニューラルネットワークの凸計画問題への応用においても利用されている関数である [7] . また、これまでに複素ニューラルネットワークの活性化関数としてしばしば用いられてきた次の関数 [10] ~ [14] も含んでいる .

$$f_i(u_i) = \tanh(|u_i|) \frac{u_i}{|u_i|} \quad (4)$$

$$f_i(u_i) = \frac{u_i}{1 + |u_i|} \quad (5)$$

活性化関数 f のすべての要素 f_i がクラス \mathcal{F}^{lm} に属するとき、定義 1 の条件 3 より正定値対角行列 $L = \operatorname{diag}\{l_1, l_2, \dots, l_n\}$ が存在する . この行列は次節の安定性条件において利用される . なお、 f_i が (3) の場合 $L = I_n$ となる .

3. 大域的漸近安定性条件

離散時間複素リカレントニューラルネットワークの活性化関数として、クラス \mathcal{F}^{lm} に属する関数を用いた場合、次の定理のように、結合荷重に適切な条件を課すことで、ネットワークの大域的漸近安定性を保証することができる .

[定理 1] 活性化関数が $f_i(u_i) \in \mathcal{F}^{lm}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) である離散時間複素リカレントニューラル

ネットワーク (1) において、 $L = \operatorname{diag}\{l_1, l_2, \dots, l_n\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ とおいたとき、結合荷重行列 $W \in \mathbb{C}^{n \times n}$ に対して、

$$\left(\frac{\gamma}{1+\gamma} P - \gamma A P A \right) L^{-2} - |W|^t P |W| > 0 \quad (6)$$

を満たす正定値対角行列 P と正の実数 $\gamma > 0$ が存在するならば、ネットワークの平衡点は唯一存在し、かつ大域的漸近安定である（証明は付録参照）.

ネットワーク (1) において、 $A = 0$ とおいた特別な場合の大域的漸近安定性条件に関し、定理 1 の証明において $A = 0$ 、 $\gamma \rightarrow \infty$ とすることによって、次の系が直ちに導かれる .

[系 1] 活性化関数が $f_i(u_i) \in \mathcal{F}^{lm}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) であり、 $A = 0$ である離散時間複素リカレントニューラルネットワーク (1) において、 $L = \operatorname{diag}\{l_1, l_2, \dots, l_n\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ とおいたとき、結合荷重行列 $W \in \mathbb{C}^{n \times n}$ に対して、

$$L^{-1} P L^{-1} - |W|^t P |W| > 0 \quad (7)$$

を満たす正定値対角行列 P が存在するならば、複素ニューラルネットワークの平衡点は唯一存在し、かつ大域的漸近安定である .

連続時間複素リカレントニューラルネットワーク (2) に対しては、次の定理のようにネットワークの大域的漸近安定性を保証することができる .

[定理 2] 活性化関数が $f_i(u_i) \in \mathcal{F}^{lm}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) である連続時間複素リカレントニューラルネットワーク (2) において、 $L = \operatorname{diag}\{l_1, l_2, \dots, l_n\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ とおいたとき、結合荷重行列 $W \in \mathbb{C}^{n \times n}$ に対して、

$$P(DL^{-1} - |W|) + (DL^{-1} - |W|)^t P > 0 \quad (8)$$

を満たす正定値対角行列 P が存在するならば、複素ニューラルネットワークの平衡点は唯一存在し、かつ大域的漸近安定である（証明は付録参照）.

文献 [14] では、同様に連続時間複素ネットワークの大域的漸近安定性条件が得られている . この条件と比べると、定理 2 の結合荷重についての条件は文献 [14] の定理 1 における結合荷重に関する条件の十分条件となっている . この意味で結合荷重の条件は保守的であるが、活性化関数については連続偏微分可能性を仮定しないより広いクラスであるという特徴がある . また、定理 1、定理 2 について実数領域に制限した結果を、

対応する実数ネットワークに関する文献 [8], 文献 [6] の結果とそれぞれ比較したとき, 細かい差異はあるが上記の文献 [14] に関する議論と並行した得失を論ずることができる。すなわち, 一般に活性化関数に関しては, 同一の (連続時間の場合), またはより広いクラス (離散時間の場合) であるが, 結合荷重に関する条件は保守的となる。

定理 1 の条件 (6) では, 二つのパラメータ P, γ を選ばなければならない。このうち γ について (6) は非線形であるが, 単一パラメータであるので文献 [8] に見られるような試行錯誤により決定することは困難ではない。ひとたび γ が定まると, (6) は P についてのリヤプノフ方程式に帰着し解集合は容易に求めることができる。この点は条件 (8) についても同様である。

ところで, 定理 1, 2 の結果に基づけば, 離散時間複素リカレントニューラルネットワークと連続時間複素リカレントニューラルネットワークの平衡点, 及び大域的漸近安定性条件に関して, 両ネットワークを適当な条件のもとで, 相互に結び付けることができる。

[定理 3] 活性化関数がクラス \mathcal{F}^{lm} に属し, 結合荷重行列に関して, 行列 $L^{-1} - |W|$ が M 行列ならば, 平衡点が一致し, 大域的漸近安定である離散時間複素リカレントニューラルネットワーク, 連続時間複素リカレントニューラルネットワークが存在する (証明は付録参照)。

なお, 定理 3 の条件が成り立つとき, その存在が保証されるネットワークは, それぞれ以下ようになる。

$$u[k+1] = Wf(u[k]) + b \quad (9)$$

$$\frac{du(t)}{dt} = -Du(t) + DWf(u(t)) + Db \quad (10)$$

ただし, $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は任意の正定値対角行列である。定理 3 により, ニューラルネットワークを最適化問題などへ応用する場合, 応用上の制約に基づいたネットワークの適用可能性の見通しや設計方針などを, 連続時間モデルと離散時間モデルの両方に対して同時にすることが可能である。

4. 凸計画問題への適用

ここでは, 複素リカレントニューラルネットワーク (9) または (10) とその大域的漸近安定性条件の凸計画問題への適用例を示す。対象とする凸計画問題は, $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ を与えられたエルミート正定値行列, $S_i \subset \mathbb{C}$ を複素平面上で原点を含む任

意の有界な閉凸集合, $q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^t \in \mathbb{C}^n$, $v = [v_1, v_2, \dots, v_n]^t \in \mathbb{C}^n$ とし,

$$\begin{aligned} \min_v \quad & J(v) = \frac{1}{2} v^* M v + \text{Re}(q^* v) \\ \text{s.t.} \quad & v_i \in S_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (11)$$

で定式化される問題である。この問題の制約条件は任意の有界閉凸領域となっており, 非線形な制約条件が課せられた凸計画問題である。

一般に, 点 $v^e \in \mathbb{C}^n$ が問題 (11) の最適解であるための必要十分条件は, 射影 (3) を用いた次式の写像 $H(v) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$

$$\begin{aligned} H(v) &= \Psi(v - \alpha M v - \alpha q), \quad \forall \alpha > 0 \quad (12) \\ \Psi &= [\psi_{S_1}(u_1), \psi_{S_2}(u_2), \dots, \psi_{S_n}(u_n)]^t \end{aligned}$$

に対して, 点 v^e が $H(\cdot)$ の不動点となることである。これは, 複素平面を二次元ベクトル空間とし, 凸計画問題を実数領域における問題として考えると文献 [16, pp.203-214] より不動点問題に帰着されることが分かり, この不動点問題を再び複素領域における問題に書き換えると写像 (12) の不動点問題となることから導かれる。ここで, ネットワーク (9) または (10) において,

$$\begin{aligned} W &= I_n - \alpha M, \quad b = -\alpha q \\ f &= \Psi, \quad D : \text{任意の正定値対角行列} \end{aligned}$$

と定義した場合, これらのネットワークの平衡点は (12) の不動点となる。よって, このネットワークが大域的漸近安定性条件を満たすならば, 今の場合, 例えば定理 3 より α を選んで実数行列 $I_n - |I_n - \alpha M|$ を M 行列とすることができるならば, ネットワーク (9), (10) の複素出力は問題 (11) の最適解へ収束する。この安定性条件が満たされるための十分条件として, 例えば次の結果が成り立つ。

[補題 1] エルミート行列 $M = \{m_{ij}\} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ が

$$|m_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n |m_{ij}| \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (13)$$

を満たし, $0 < \alpha < 1 / \max |m_{ij}|$ であるならば, 実数行列 $I_n - |I_n - \alpha M|$ は M 行列である (簡単な証明は付録参照)。

一般に, 問題 (11) を実数上の最小化問題とみなして, 実数ニューラルネットワーク [7] を適用すること

も可能である．しかし，問題の制約条件に依存してネットワークは複雑になる．一方，上記の例のように複素ニューラルネットワークでは，問題によっては実数ネットワークに比べて容易に定式化・求解することが可能である．次章で簡単な例を示す．

5. 数 値 例

凸計画問題 (11) を実際に複素ニューラルネットワーク (9), (10) を用いて解いた数値例を示す．設定した数値は以下のとおりである．

$$M = \begin{pmatrix} 6.0 & -4.0 + j2.0 \\ -4.0 - j2.0 & 7.0 \end{pmatrix}$$

$$q = \begin{pmatrix} 6.0 + j9.0 & j10.0 \end{pmatrix}^t$$

$$S_1 = \{v_1 \in \mathbb{C} \mid |v_1| \leq 1, |\arg v_1| \leq \pi/6\}$$

$$S_2 = \{v_2 \in \mathbb{C} \mid |v_2| \leq 1, |\arg v_2| \leq \pi/6\}$$

ただし， $\arg v_i$ は $v_i \in \mathbb{C}$ の偏角を表している．なお，凸集合 S_i は，複素平面上での扇型領域であり，この場合，次式により射影を定義することが可能である．

$$\psi_{S_i}(u_i) = g_2(g_1(u_i)) \tag{14}$$

ただし， $\mu = \tan(\pi/6)$ ， $\sigma_1 = \mu^{-1}u_i^R + |u_i^I|$ ， $\sigma_2 = \mu u_i^R - |u_i^I|$ とし，

$$g_1(u_i) = \frac{1}{1 + \mu^2} \times \left[\mu(\max\{0, \sigma_1\} + \max\{0, \sigma_2\}) + \sqrt{-1} \cdot \text{sgn}(u_i^I) \times (\max\{0, \sigma_1\} - \mu^2 \max\{0, \sigma_2\}) \right]$$

$$g_2(u_i) = \min(1, |u_i|) \frac{u_i}{|u_i|}$$

である．また，行列 M は補題 1 の条件を満たしている．この問題に対して複素リカレントニューラルネットワーク (9), (10) を適用する．選択したネットワークのパラメータは， $\alpha = 0.125$ ， $D = \text{diag}\{2.0, 5.0\}$ ， $W = (I_n - \alpha M)$ ， $b = -\alpha q$ ， f_1, f_2 は (14) の関数である．なお，問題の最適解は， $(v_1^{opt}, v_2^{opt}) = (0.48 - j0.28, 0.87 - j0.5)$ である．

ネットワークを実際に動作させた結果，離散時間ネットワーク (9)，連続時間ネットワーク (10) とともに， $(v_1, v_2) = (0.477 - i0.275, 0.866 - i0.500)$ に収束し，問題の解が得られた．図 1 は，適当に初期値を選んだ

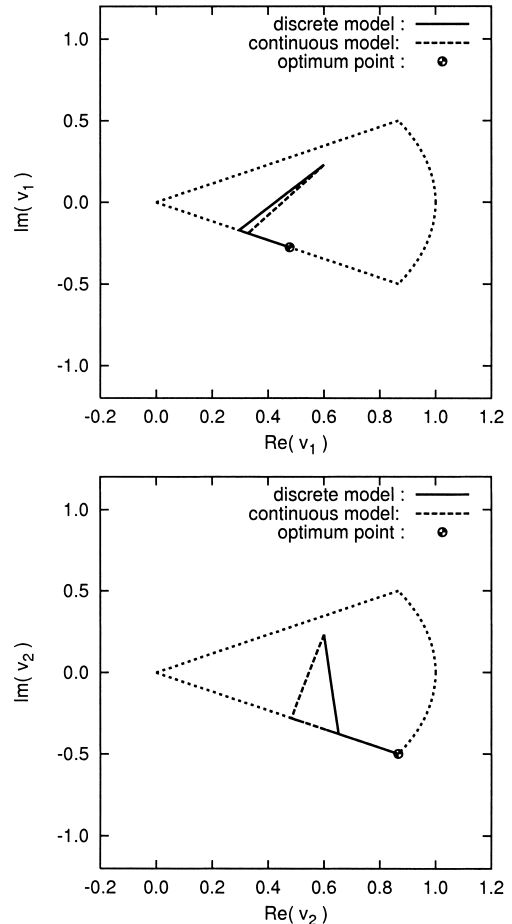


図 1 最適解へ収束するネットワーク (9), (10) の出力
Fig. 1 Output trajectories of neural network (9) and (10) converging on the optimum point in complex plane.

ときの両ネットワークの動作例である．図では，離散時間複素ニューラルネットワークを動作させたときのネットワークの複素出力 $v_1, v_2 \in \mathbb{C}$ の軌道（実線）と連続時間複素ニューラルネットワークを動作させたときのネットワークの複素出力 $v_1, v_2 \in \mathbb{C}$ の軌道（破線）を示している．いずれもごく短いパスで最適点（黒点）に収束している．

6. む す び

本論文では，離散時間または連続時間で動作する複素リカレントニューラルネットワークを対象とし，その大域的漸近安定性条件を示した．条件導出のため，非線形複素関数のクラスを定義し，そのクラスの複素

ニューロンの活性化関数をもつネットワークの結合荷重行列に関する条件として導いた．また，安定性条件を満たすネットワークパラメータが与えられたとき，同一の平衡点へ収束する離散時間，連続時間ネットワークを定義できることを示した．更に，得られた大域的漸近安定性条件の一つの応用として，任意の有界閉凸領域を制約条件にもつ凸計画問題への適用例を示した．複素リカレントニューラルネットワークには，結合荷重行列のほかに活性化関数の選択に大きな自由度がある．これを利用すれば様々な定性的性質を導くことができ，広範な応用につながると考えられる．

文 献

- [1] J.J. Hopfield, "Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons," Proc. Natl. Acad. Sci. USA, vol.81, pp.3088-3092, 1984.
- [2] J.J. Hopfield and D.W. Tank, "'Neural' computation of decisions in optimization problems," Biol. Cybern., vol.52, pp.141-152, 1985.
- [3] D.W. Tank and J.J. Hopfield, "Simple 'neural' optimization networks: An A/D converter, signal decision circuit, and a linear programming circuit," IEEE Trans. Circuits Syst., vol.33, no.5, pp.533-541, 1986.
- [4] J.H. Li, A.N. Michel, and W. Porod, "Qualitative analysis and synthesis of a class of neural networks," IEEE Trans. Circuits Syst., vol.35, no.8, pp.976-986, 1988.
- [5] M. Forti, S. Manetti, and M. Marini, "Necessary and sufficient condition for absolute stability of neural networks," IEEE Trans. Circuits Syst. I, vol.41, no.7, pp.491-494, 1994.
- [6] M. Forti and A. Tesi, "New conditions for global stability of neural networks with application to linear and quadratic programming problems," IEEE Trans. Circuits Syst. I, vol.42, no.7, pp.354-366, 1995.
- [7] Y. Xia and J. Wang, "A recurrent neural network for nonlinear convex optimization subject to nonlinear inequality constraints," IEEE Trans. Circuits Syst. I, vol.51, no.7, pp.1385-1394, 2004.
- [8] L. Jin, and M.M. Gupta, "Globally asymptotical stability of discrete-time analog neural networks," IEEE Trans. Neural Netw., vol.7, no.4, pp.1024-1031, 1996.
- [9] S. Hu and J. Wang, "Global stability of a class of discrete-time recurrent neural networks," IEEE Trans. Circuits Syst. I, vol.49, no.8, pp.1104-1117, 2002.
- [10] 廣瀬 明, 複素ニューラルネットワーク, 数理学 SGC ライブラリ 38, サイエンス社, 2005.
- [11] M. Takeda and T. Kishigami, "Complex neural fields with a Hopfield-like energy function and an analogy to optical fields generated in phase-conjugate resonators," J. Opt. Soc. Am. A, vol.9, no.12, pp.2182-2191, 1992.
- [12] 橋本直樹, 黒江康明, 森 武宏, "複素数値化した自己相関形連想記憶のダイナミクスに関する理論的考察," 信学論(A), vol.J83-A, no.6, pp.750-760, June 2000.
- [13] 橋本直樹, 黒江康明, 森 武宏, "複素ニューラルネットワークのエネルギー関数について," システム制御情報学会論文誌, vol.15, no.10, pp.559-565, 2002.
- [14] 吉田光男, 森 武宏, 黒江康明, "複素リカレントニューラルネットワークの大域的漸近安定性条件とその応用," 電学論(C), vol.124, no.9, pp.1847-1852, 2004.
- [15] 中岡 稔, 不動点定理とその周辺, pp.7-14, 岩波書店, 1977.
- [16] 福島雅夫, 非線形最適化の基礎, 朝倉書店, 2001.
- [17] 荒木光彦, "M 行列とその応用-I," システムと制御, vol.20, no.12, pp.675-680, 1976.
- [18] 荒木光彦, "M 行列とその応用-II," システムと制御, vol.21, no.2, pp.114-121, 1977.

付 録

1. 定理 1 の証明

平衡点の存在は, 写像 $\chi(u) := (I_n - A)^{-1}(Wf(u) + b)$ の不動点の存在問題であり, Brower の不動点定理「連続写像の像が有界ならば, 写像は不動点をもつ」[15] より, ニューロンの非線形関数がある有界関数であることから $\chi(\cdot)$ も有界となり, 従って不動点を持ち平衡点の存在が保証される.

平衡点が大域的漸近安定であることの証明のために, 存在する平衡点の一つを $u^e \in \mathbb{C}^n$ とおき, ネットワーク (1) を $z = u - u^e$ により, 以下のように変数変換する.

$$\begin{cases} z[k+1] = Az[k] + Wh(z[k]) \\ h(z[k]) = f(z[k] + u^e) - f(u^e) \end{cases} \quad (A.1)$$

このシステムに対して, 原点が大域的漸近安定な平衡点であることをリヤプノフ関数を用いて示す. 構成するリヤプノフ関数は, 定理の条件を満たす正定値対角行列 P を係数にもつ次のような二次形式関数である.

$$V_1(z[k]) = z[k]^* P z[k] \quad (A.2)$$

このリヤプノフ関数のネットワークの解に沿った前進差分 ΔV_1 は, 次のように計算される.

$$\Delta V_1(z)|_{(A.1)} = z[k+1]^* P z[k+1] - z[k]^* P z[k] \quad (A.3)$$

定理の条件のもとで上式を評価する. $z = z[k]$ とすると,

$$\begin{aligned}
 (\text{上式}) &= -z^*(P - A^*PA)z \\
 &\quad + 2\text{Re}\{z^*A^*PWh(z)\} \\
 &\quad + h^*(z)W^*PWh(z) \quad (\text{A.4})
 \end{aligned}$$

となる．ここで，定理の条件を満足する正の実数を γ とすると， $\|P^{\frac{1}{2}}\{\gamma^{\frac{1}{2}}Az - \gamma^{-\frac{1}{2}}Wh(z)\}\|^2 \geq 0$ を展開することにより，以下の関係が成り立つ．ただし， $P^{\frac{1}{2}} = \text{diag}\{p_1^{\frac{1}{2}}, p_2^{\frac{1}{2}}, \dots, p_n^{\frac{1}{2}}\}$ である．

$$\begin{aligned}
 &2\text{Re}\{z^*A^*PWh(z)\} \\
 &\leq \gamma z^*A^*PAz + \gamma^{-1}h^*(z)W^*PWh(z)
 \end{aligned}$$

これより，(A.4) に対して次の式が成り立つ．

$$\begin{aligned}
 \Delta V_1 &\leq -z^*\{P - (1 + \gamma)A^*PA\}z \\
 &\quad + (1 + \gamma^{-1})h^*(z)W^*PWh(z) \\
 &\leq -|z|^t\{P - (1 + \gamma)A^*PA\}|z| \\
 &\quad + (1 + \gamma^{-1})|h(z)|^t|W|^tP|W||h(z)|
 \end{aligned}$$

更に，定義 1 の条件 3 より，次式を得る．

$$\begin{aligned}
 (\text{上式}) &\leq -|z|^t\{P - (1 + \gamma)A^*PA\}|z| \\
 &\quad + (1 + \gamma^{-1})|z|^tL|W|^tP|W||L|z| \\
 &= -(1 + \gamma^{-1})|z|^tLRL|z| \quad (\text{A.5})
 \end{aligned}$$

ただし，

$$R = \left(\frac{\gamma}{1 + \gamma}P - \gamma A^*PA \right) L^{-2} - |W|^tP|W|$$

である．よって，(A.5) 右辺は (6) より負定値であり， $\Delta V_1(z)|_{(\text{A.1})} \leq 0$ となる．ゆえに，等号が成り立つのは原点のみなので， $z = 0$ すなわち平衡点 u^e は漸近安定である．更に，リヤプノフ関数 (A.2) は，行列 P が正定値対角行列ゆえ， $\|z\| \rightarrow \infty$ のとき $\|V_1(z)\| \rightarrow \infty$ となり，平衡点の漸近安定性は大域的である． \square

2. 定理 2 の証明

平衡点の存在は，写像 $\chi(u) := D^{-1}(Wf(u) + b)$ の不動点の存在問題であり，Brower の不動点定理 [15] より，定理 1 同様に証明される．

存在が示された平衡点の一つを $u^e \in \mathbb{C}^n$ とおき，ネットワーク (2) を $z = u - u^e$ により，変数変換したシステムは次のようになる．

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = -Dz + Wh(z) \\ h(z) = f(z + u^e) - f(u^e) \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

このシステムに対して，原点が大域的漸近安定な平衡点であることをリヤプノフ関数を用いて示す．構成するリヤプノフ関数は，定理の条件を満たす正定値対角行列を P とし， $Q = LP$ とした次のような関数である．

$$V_2(z(t)) = z(t)^*Qz(t) \quad (\text{A.7})$$

$V_2(z(t))$ を $V_2(z^R(t), z^I(t)) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ とみなし，ネットワーク (A.6) の解に沿って時間微分すると，次のように計算される．

$$\begin{aligned}
 \frac{dV_2(z)}{dt} \Big|_{(\text{A.6})} &= -2z^*QDz + 2\text{Re}\{z^*QWh(z)\} \\
 &= -2|z|^tQD|z| + 2\text{Re}\{z^*QWh(z)\} \\
 &\leq -2|z|^tQD|z| + 2|z|^tQ|W||h(z)|
 \end{aligned}$$

更に，定義 1 の条件 3 より，次式を得る．

$$\begin{aligned}
 (\text{上式}) &\leq -2|z|^tQD|z| + 2|z|^tQ|W||L|z| \\
 &= -2|z|^tQ(D - |W||L|)|z| \\
 &= -2|z|^tLP(DL^{-1} - |W||L|)|z| \\
 &= -|z|^tL\{P(DL^{-1} - |W||L|) \\
 &\quad + (DL^{-1} - |W||L|)^tP\}L|z| \quad (\text{A.8})
 \end{aligned}$$

よって，(A.8) と (8) より， $dV_2(z)/dt|_{(\text{A.6})} \leq 0$ であり，等号が成り立つのは原点のみなので， $z = 0$ すなわち平衡点は漸近安定である．更に，リヤプノフ関数 (A.7) は，行列 Q が正定値対角行列ゆえ， $\|z\| \rightarrow \infty$ のとき $\|V_2(z)\| \rightarrow \infty$ となり，平衡点の漸近安定性は大域的である． \square

3. 定理 3 の証明

ネットワーク (9)，(10) の平衡点が一致することは明らかである．今，行列 $X = L^{-1} - |W|$ は M 行列であるとすると，このとき，行列 $DX = DL^{-1} - |DW|$ もまた M 行列である．更に， M 行列の性質 ([18]: 基本定理 PartIII) より， $L^{-1}PL^{-1} - |W|^tP|W| > 0$ ， $PDX + (DX)^tP > 0$ を満たす正定値対角行列 P が存在する．よって，系 1，定理 2 より，ネットワーク (9)，(10) の平衡点は大域的漸近安定である． \square

4. 補題 1 の証明

行列 M ， α は定理の条件を満たすとすると，このとき， $1 - \alpha|m_{ii}| > 0$ より，

$$1 - |1 - \alpha|m_{ii}|| = \alpha|m_{ii}| > \alpha \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |m_{ij}|$$

となり, M 行列の性質 ([17]: 基本定理 PartI) より,
 $I_n - |I_n - \alpha M|$ が M 行列であることが導かれる.

□

(平成 18 年 4 月 5 日受付, 9 月 11 日再受付,
12 月 25 日最終原稿受付)



吉田 光男

平 13 京都工繊大・工芸・電子情報卒,
平 18 同大学院工芸科学研究科博士後期
課程了. 博士(工学). この間, 主として
ニューラルネットワーク解析についての研
究に従事.



森 武宏 (正員)

昭 43 京大・工・電子卒, 昭 49 同大大学
院工学研究科博士課程電気工学専攻了. 同
年同大学工学部オートメーション研究施設
助手, 同応用システム科学教室助教授を経
て, 現在, 京都工芸繊維大学工芸学部電子
情報工学科教授. この間, 主として制御系
の安定解析に関する研究に従事. 工博. IEEE, 計測自動制御
学会会員.