Memoirs of the Faculty of Engineering and Design
Kyoto Institute of Technology 51 (March, 2003)

Une Démonstration d'Analycité de Fonctions Trigonométriques sans Usage du Calcul Infinitésimal

Akira NAKAOKA

(Received August 20, 2002 ; Accepted November 1, 2002)

Abstract

In this note we shall give a proof that $\cos x$ and $\sin x$ can be developed into the Maclaurin series without using calculus. Our starting point is the following well-known inequalities; $\sin x \leq x \leq \tan x (0 \leq x < \frac{\pi}{2})$. Of course, we shall make use of some basic facts of trigonometric functions obtained geometrically, like the addition rules of $\cos x$ and $\sin x$.

Key Words: *Maclaurin series; trigonometric functions*

1. Introduction

Pour tout $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, on pose

$$f_k(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

$$g_k(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Le but de cette note est de démontrer les deux inégalités suivantes;

$$f_1(x) \leq f_3(x) \leq \cdots \leq f_{2k+1}(x) \leq \cos x \leq f_{2k}(x) \leq \cdots \leq f_2(x) \leq f_0(x)$$

$$g_1(x) \leq g_3(x) \leq \cdots \leq g_{2k+1}(x) \leq \sin x \leq g_{2k}(x) \leq \cdots \leq g_2(x) \leq g_0(x)$$

$$\left(0 \leq x < \frac{\pi}{2}\right).$$

Comme préparation, on commence par la proposition suivante.

Proposition 1.1. *Pour tout* $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, *il se trouve que*

(1) $\sum_{r=0}^{k} {}_{2k+1}C_{2r+1} = 2^{2k}$

(2) $\sum_{r=0}^{k} {}_{2k+1}C_{2r} = 2^{2k}$

(3) $\sum_{r=0}^{k} {}_{4k}C_{2r+1} = 2^{4k-2}$

(4) $2\sum_{r=0}^{k-1} {}_{4k+2}C_{2r+1} + {}_{4k+2}C_{2k+1} = \left(\sum_{r=0}^{2k} {}_{4k+2}C_{2r+1}\right) = 2^{4k+1}$

oú ${}_{p}C_{q} = \dfrac{p!}{(p-q)!q!}$.

(**Preuve**) (1) En notant qu'il se trouve que ${}_{2k+1}C_{2r+1} = {}_{2k+1}C_{2(k-r)}$, on a

$$\sum_{r=0}^{k} {}_{2k+1}C_{2r+1} = \sum_{r=0}^{k} {}_{2k+1}C_{2(k-r)} = \sum_{r=0}^{k} {}_{2k+1}C_{2r}\,.$$

Par ailleurs, comme il est bien connu, il se trouve que

$$\sum_{r=0}^{k} {}_{2k+1}C_{2r+1} = \sum_{r=0}^{k} {}_{2k+1}C_{2r} = \sum_{r=0}^{2k+1} {}_{2k+1}C_{r} = 2^{2k+1},$$

ce qui démontre à la fois (1) et (2).

(3) En substituant $2k-1$ à k dans la relation (1), on a $\sum_{r=0}^{2k-1} {}_{4k-1}C_{2r+1} = 2^{4k-2}$. Par ailleurs, en utilisant la formule ${}_{4k}C_{2r+1} = {}_{4k-1}C_{2r+1} + {}_{4k-1}C_{2r}$, on trouve facilement

$$\sum_{r=0}^{2k-1} {}_{4k}C_{2r+1} = \sum_{r=0}^{2k-1} {}_{4k-1}C_{2r+1} + \sum_{r=0}^{2k-1} {}_{4k-1}C_{2r} = 2^{4k-1}$$

des relations (1) et (2). De plus, on a

$$\begin{aligned}\sum_{r=0}^{2k-1} {}_{4k}C_{2r+1} &= \sum_{r=0}^{k-1} {}_{4k}C_{2r+1} + \sum_{r=k}^{2k-1} {}_{4k}C_{2r+1} \\ &= 2\sum_{r=0}^{k-1} {}_{4k}C_{2r+1}\,,\end{aligned}$$

ce qui démontre (3).

(4) En notant que ${}_{4k+2}C_{2r+1} = {}_{4k+1}C_{2r+1} + {}_{4k+1}C_{2r}$ et en substituant $2k$ à k dans la relation (1), on peut également démontrer (4).

2. Etablissement du but

Dans ce paragraphe, on va démontrer quelques propositions nécessaires à établir les deux inégalités exposées au commencement.

Proposition 2.1. *Soit $j,\ k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, on a alors*

$$2f_j\left(\frac{x}{2}\right)g_k\left(\frac{x}{2}\right) \equiv g_k(x)\ (mod\ x^{2k+3}).$$

(**Preuve**) Il suffirait de démontrer quand $j = k$. On va utiliser la mèthode d'induction en k. Pout $k = 0$, c'est évidémment correct. On suppose aussi que la proposition est correcte pour k. On note alors que la relation suivante plus présise:

$$2f_k\left(\frac{x}{2}\right)g_k\left(\frac{x}{2}\right) \equiv (mod\ x^{2k+5})g_k(x) + 2(-1)^{k+1}\left(\sum_{r=1}^{k}\frac{1}{(2k+3-2r)!(2r)!}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+3}.$$

Par ailleurs, on a

$$f_{k+1}(x) = f_k(x) + \frac{(-1)^{k+1}x^{2k+2}}{(2k+2)!}$$
$$g_{k+1}(x) = g_k(x) + \frac{(-1)^{k+1}x^{2k+3}}{(2k+3)!}.$$

On a donc

$$2f_{k+1}\left(\frac{x}{2}\right)g_{k+1}\left(\frac{x}{2}\right) \equiv g_k(x) + \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+3)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+2}\left(\sum_{r=0}^{k+1} {}_{2k+3}C_{2r}\right)x^{2k+3} \pmod{x^{2k+5}}$$
$$\equiv g_{k+1}(x) \pmod{x^{2k+5}},$$

ce qui complète la preuve.

Proposition 2.2. *Il se trouve que*

(1) $1-\dfrac{x^2}{2!} \leq \cos x \leq 1$

(2) $x-\dfrac{x^3}{3!} \leq \sin x \leq x$

(**Preuve**) Il suffit de démontrer l'inégalité de gauche, pour chaque cas.

(1) D'abord, en notant que $\dfrac{1+\cos 2x}{2} = \cos^2 x = 1-\sin^2 x \geq 1-x^2$, on arrive facilement à $\cos 2x \geq 1-2x^2$. Il suffit de substituer $2x$ à x.

(2) On commence par $\sin x \geq x\cos x$. En multipliant $\cos x$ de chaque côté, on trouve $\dfrac{\sin 2x}{2} = \sin x\cos x \geq x\cos^2 x \geq x\left(1-\dfrac{x^2}{2!}\right)^2$. On a donc $\sin x \geq x\left(1-\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{x}{2}\right)^2\right)^2$. En répétant de la multiplication de $\cos x$ et en notant que $\cos x \geq 1-\dfrac{x^2}{2!}$, on obtient pour tout $n \in \mathbf{N}$

$$\sin x \geq x\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}x^2\right)\prod_{r=1}^{n}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{2^r}\right)^2\right)$$
$$\geq x\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}x^2\right)\left(1-\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2^2}\right)^r x^2\right)$$
$$\geq x\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}x^2\right)\left(1-\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right)\left(\frac{x^2}{3!}\right)\right)$$
$$\geq x\left(1-\left(\frac{x^2}{3!}\right)-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}x^2\right),$$

ce qui donne (2).

Proposition 2.3. *Pour tout* $k \in \mathbf{N}$, *il se trouve que*

$$1-2\left\{g_{2k-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right\}^2 \leq f_{2k}(x).$$

(**Preuve**) On examine les coefficients des termes x^{4s}, x^{4s-2} $(s = 1, 2, \cdots\cdots, k)$ de la fonction $2\left\{g_{2k-1}\left(\dfrac{x}{2}\right)\right\}^2$. D'abord, on voit que le coeffcient de x^{4s} est donné par

$$-\left(\frac{1}{2}\right)^{4s-2}\sum_{r=0}^{s-1}\frac{1}{(4s-2r-1)!(2r+1)!}=-\frac{1}{(4s)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{4s-2}\sum_{r=0}^{s-1}{}_{4s}C_{2r+1}$$
$$=-\frac{1}{(4s)!},$$

puis on voit également que le coefficient de x^{4s-2} est donné par

$$\frac{1}{(4s-2)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{4s-3}\left(2\sum_{r=0}^{s-2}{}_{4s-2}C_{2r+1}+{}_{4s-2}C_{2s-1}\right)=\frac{1}{(4s-2)!},$$

ce qui donne $1-2\left\{g_{2k-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right\}^2\equiv f_{2k}(x)\quad(mod\ x^{4k-2})$.

Ensuite, on examine le terme avec degré plus que $4k+2$ de $\left\{g_{2k-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right\}^2$. Celui-ci est donné par

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{4k+2}\sum_{s=1}^{2k-1}\frac{1}{(2s+1)!}\sum_{r=0}^{s-1}\frac{(-1)^{s-r-1}}{(4k-2r-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2(s-r-1)}$$

En notant ici que $\frac{1}{(4k-2r-3)!}-\frac{1}{(4k-2r-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^2\geq 0$ $(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 2k-3)$, on voit facilement que le terme avec degré plus que $4k+2$ de $\left\{g_{2k-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right\}^2$ est non-négatif, ce qui donne le résultat demandé.

Proposition 2.4. *Pour tout* $k\in\mathbf{N}$, *il se trouve que*

$$1-2g_{2k}\left(\frac{x}{2}\right)^2\geq f_{2k+1}(x).$$

(**Preuve**) La démonstration est presque la même que pour la Proposition 2.3.

On suppose ici qu'il se trouve $f_{2k+1}(x)\leq\cos x\leq f_{2k}(x)$, $g_{2k+1}(x)\leq\sin x\leq g_{2k}(x)$. On note que ces inégalités se réalisent par la Proposition 2.2.
En notant

$$\frac{1+\cos 2x}{2}=\cos^2 x=1-\sin^2 x\leq 1-\{g_{2k+1}(x)\}^2,$$

on a immédiatement $\cos x\leq 1-2\left\{g_{2k+1}\left(\frac{x}{2}\right)\right\}^2\leq f_{2k+2}(x)$.

Proposition 2.5. *S'il se trouve que* $\cos x\leq f_{2k+2}(x)$, *alors on a* $\sin x\leq g_{2k+2}(x)$.

(**Preuve**) D'abord, on note que l'on a $\frac{\sin 2x}{2}=\sin x\cos x\leq g_{2k}(x)f_{2k+2}(x)$. Alors, en vertu de la Proposition 2.1, on obtient

$$\sin x\leq 2g_{2k}\left(\frac{x}{2}\right)f_{2k+2}\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$=g_{2k}(x)-2\left(\frac{x}{2}\right)^{4k+3}\sum_{s=1}^{2k+1}\frac{1}{(2s)!}\sum_{r=0}^{s-1}\frac{(-1)^{s-r-1}}{(4k-2r+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2(s-r-1)}$$
$$+\frac{2}{(4k+4)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{4k+5}\sum_{r=0}^{2k}\frac{(-1)^{2k-r}}{(4k-2r+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2(2k-r)}$$

Ici, en notant encore $\dfrac{1}{(4k-2r-3)!}-\dfrac{1}{(4k-2r-1)!}\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 \geq 0\,(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 2k-3)$, on observe

$$\sin x \leq g_{2k}(x)-2\left\{\sum_{r=1}^{2k+1}\frac{1}{(2r)!(4k-2r+3)!}\right\}\left(\frac{x}{2}\right)^{4k+3}$$
$$+2\left\{\sum_{r=2}^{2k+2}\frac{1}{(2r)!(4k-2r+5)!}\right\}\left(\frac{x}{2}\right)^{4k+5}.$$

Définissant la côté droit comme $g_{2k}(x)-2A_k\left(\frac{x}{2}\right)^{4k+5}+2B_k\left(\frac{x}{2}\right)^{4k+5}$, on a

$$\sin x \leq g_{2k}(x)-2A_k\left(\frac{x}{2}\right)^{4k+3}+2B_k\left(\frac{x}{2}\right)^{4k+5}.$$

On a donc $\dfrac{\sin 2x}{2}=\sin x\cos x \leq \left(g_{2k}(x)-2A_k\left(\dfrac{x}{2}\right)^{4k+3}+2B_k\left(\dfrac{x}{2}\right)^{4k+5}\right)f_{2k+2}(x)$, ce qui apporte

$$\sin x \leq 2\left(g_{2k}\left(\frac{x}{2}\right)-2A_k\left(\frac{x}{2^2}\right)^{4k+3}+2B_k\left(\frac{x}{2^2}\right)^{4k+5}\right)f_{2k+2}\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$\leq g_{2k}(x)-2A_k\left(\frac{x}{2}\right)^{4k+3}+2B_k\left(\frac{x}{2}\right)^{4k+5}-2^2A_k\left(\frac{x}{2^2}\right)^{4k+3}f_1\left(\frac{x}{2}\right)+2^2B_k\left(\frac{x}{2^2}\right)^{4k+5}$$
$$\leq g_{2k}(x)-\left(\frac{1}{2}\right)^{4k+2}A_k\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{4k+2}\right\}x^{4k+3}$$
$$+\left(\frac{1}{2}\right)^{4k+4}B_k\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{4k+4}\right\}x^{4k+5}+\left(\frac{1}{2}\right)^{8k+7}x^{4k+5},$$

puisque il se trouve que $f_1(x) \leq f_{2k+2}(x) \leq 1$ et $A_k,\ B_k > 0$.

En répétant ces procédés, on obtient pour tout $n \in \mathbf{N}$

$$\sin x \leq g_{2k}(x)-\left(\frac{1}{2}\right)^{4k+2}A_k\left(\sum_{r=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{(4k+2)r}\right)x^{4k+4}B_k\left(\sum_{r=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{(4k+4)r}\right)x^{4k+5}$$
$$+\left(\frac{1}{2}\right)^{8k+7}A_k\left(\sum_{r=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{(4k+4)(n-r-1)}\sum_{s=0}^{r}\left(\frac{1}{2}\right)^{(4k+2)s}\right)x^{4k+5}.$$

En effet, cette inégalité est déjà établie pour $n=1$. On suppose que cette inégalité se réalise pour $n \in \mathbf{N}$, et on obtient alors

$$\sin x \leq 2\{g_{2k}\left(\frac{x}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}\right)^{4k+2}A_k\left(\sum_{r=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{(4k+2)r}\right)x^{4k+3}$$
$$+\left(\frac{1}{2}\right)^{4k+4}B_k\left(\sum_{r=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{(4k+4)r}\right)x^{4k+5}$$
$$+\left(\frac{1}{2}\right)^{8k+7}A_k\left(\sum_{r=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{(4k+4)(n-r-1)}\sum_{s=0}^{r}\left(\frac{1}{2}\right)^{(4k+2)r}\right)x^{4k+5}f_{2k+2}\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$\leq g_{2k}(x)-2A_k\left(\frac{x}{2}\right)^{4k+3}+2B_k\left(\frac{x}{2}\right)^{4k+5}$$
$$-2\left(\frac{1}{2}\right)^{4k+2}A_k\left(\sum_{r=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{(4k+2)r}\left(\frac{x}{2}\right)^{4k+3}\right)f_1\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$+2\left(\frac{1}{2}\right)^{4k+4}B_k\left(\sum_{r=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{(4k+4)r}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{4k+5}$$

$$+2\left(\frac{1}{2}\right)^{8k+7} A_k\left(\sum_{r=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{(4k+4)(n-r-1)}\sum_{s=0}^{r}\left(\frac{1}{2}\right)^{(4k+2)r}\left(\frac{x}{2}\right)^{4k+5}\right)$$

$$= g_{2k}(x)-\left(\frac{1}{2}\right)^{4k+2} A_k\left(\sum_{r=0}^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{(4k+2)r}\right)x^{4k+3}+\left(\frac{1}{2}\right)^{4k+4} B_k\left(\sum_{r=0}^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{(4k+4)r}\right)x^{4k+5}$$

$$+2\left(\frac{1}{2}\right)^{8k+7} A_k\left(\sum_{r=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{(4k+4)(n-r)}\sum_{s=0}^{r}\left(\frac{1}{2}\right)^{(4k+2)s}\right)x^{4k+5},$$

ce qui assure l'inégalite en question.

On a donc

$$\sin x \leq g_{2k}(x)-\frac{(1-2^{-(4k+2)(n+1)})A_k x^{4k+3}}{2^{4k+2}-1}+\frac{B_k x^{4k+5}}{2^{4k+4}-1}+\frac{A_k x^{4k+5}}{2(2^{4k+2}-1)(2^{4k+4}-1)}.$$

D'ailleurs, en notant que

$$\left(A_k+\frac{1}{(4k+3)!}\right)(4k+3)! = \sum_{r=0}^{2k+1} {}_{4k+3}C_{2r+1} = 2^{4k+2}$$

$$\left(B_k+\frac{1}{2!(4k+3)!}+\frac{1}{(4k+5)!}\right)(4k+5)! = \sum_{r=0}^{2k+2} {}_{4k+5}C_{2r+1} = 2^{4k+4},$$

on obtient $A_k = \dfrac{2^{4k+2}-1}{(4k+3)!}$, $B_k = \dfrac{2^{4k+4}-1}{(4k+5)!}-\dfrac{1}{2(4k+3)!}$, et en substituant ces relations à l'inégalité ci-dessues, on obtient

$$\sin x \leq g_{2k}(x)-\frac{x^{4k+3}}{(4k+3)!}+\frac{1}{(4k+3)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{(4k+2)(n+1)}x^{4k+3}+\frac{x^{4k+5}}{(4k+5)!}$$

$$= g_{2k+2}(x)-\frac{x^{4k+5}}{(4k+3)!},$$

ce qui donne le résultat demandé.

Proposition 2.6. *S'il se trouve que* $\sin x \leq g_{2k+2}(x)$, *alors on a* $f_{2k+3}(x) \leq \cos x$.

(**Preuve**) C'est la conséquence immédiate de la relation $\dfrac{1+\cos 2x}{2} = \cos^2 x$

$= 1-\sin^2 x \geq 1-\{g_{2k+2}(x)\}^2$ et de la Proposition 2.4.

On va démontrer ici la proposition finale.

Proposition 2.7. *S'il se trouve que* $f_{2k+3}(x) \leq \cos x$, *alors on a* $g_{2k+3}(x) \leq \sin x$.

(**Preuve**) Comme on le voit facilement, l'inégalité $g_{2k+1}(x) \leq \sin x$ apporte $g_{2k+1}(x)f_{2k+3}(x)$ $\leq \sin x \cos x = \dfrac{\sin 2x}{2}$, ce qui donne

$$\sin x \geq 2g_{2k+1}\left(\frac{x}{2}\right)f_{2k+3}\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= g_{2k+1}(x)+2\left(\frac{x}{2}\right)^{4k+5}\sum_{s=1}^{2k+2}\frac{1}{(2s)!}\sum_{r=0}^{s-1}\frac{(-1)^{s-r-1}}{(4k-2r+3)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2(s-r-1)}$$

$$-\frac{2}{(4k+6)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{4k+7}\sum_{r=0}^{2k+1}\frac{(-1)^{2k-r+1}}{(4k-2r+3)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2(2k-r+1)}$$

Donc, sil'on note encore que $\frac{1}{(4k-2r-1)!}-\left(\frac{1}{(4k-2r+1)!}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^2 \geq 0$ $(r = 0, 1, 2 \cdots\cdots, 2k-1)$, on obtient presque la méme démonstration que pour la Proposition 2.4.

$$\sin x \geq g_{2k+1}(x) + 2\left\{\sum_{r=1}^{2k+2}\frac{1}{(2r)!(4k-2r+5)!}\right\}\left(\frac{x}{2}\right)^{4k+5}$$
$$-2\left\{\sum_{r=2}^{2k+3}\frac{1}{(2r)!(4k-2r+7)!}\right\}\left(\frac{x}{2}\right)^{4k+7}.$$

Ici, en définissant aussi le côté droit come $g_{2k+1}(x)+2A_k\left(\frac{x}{2}\right)^{4k+5}-2B_k\left(\frac{x}{2}\right)^{4k+7}$, on a

$$A_k = \frac{2^{4k+4}-1}{(4k+5)!}, \quad B_k = \frac{2^{4k+6}-1}{(4k+7)!}-\frac{1}{2(4k+5)!},$$

et la méthode qui est la méme que celle utilisée dans la démonstration de la Proposition 2.4., apporte le résultat demandé.

Au vu des propositions obtenues ci-dessus, il devient presque évident que l'on peut établir le but exposé au commencement.

Département de Technologie du Systéme Mécanique,
Faculté de Technologie et Dessin,
Insitut Technologique de Kyoto,
Matsugasaki, Sakyo-ku, Kyoto 606-8585