Memoirs of the Faculty of Engineering and Design
Kyoto Institute of Technology 50 (March, 2002)

Une Démonstration Élémentaire du Théorème Fondamental d'Algèbre

Akira NAKAOKA

(Received August 10, 2001; Accepted August 10, 2001)

Abstract

In this note, we give a completely elementary proof of the fundamental theorem of algebra in a version which is real function theoretic. The proof is based only on some elementary knowledge of calculus, linear algebra and complex numbers.

Key Words: *Fundamental theorem of algebra.*

1. Introduction

Le théorème fondamental d'algèbre qui a été démontré par K.O.Gauss à 1799 est l'un de résultats de mathématique les plus splendides. Il y a déjà assez de démonstration de ce théorème bien sûr, mais l'auteur aussi voudrait essayer une démonstration par son idée qui se fonde surtout sur la version de fonction de variables réels , ce qui ne serait pas mal.

Maintenant, il y a diverses éxposés de ce théorème. Ici, nous prennons l'éxposé suivant qui semble le plus compréhensible.

Théorème 1. *Soit* $n \in \mathbf{N}$ *et* $a_k \in \mathbf{C}(k=1,2,\ldots,n)$, *alors l'équation algébrique suivante:*

$$P(z):=z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_{n-1}z+a_n=0$$

admet au moins une solution dans $\mathbf{C}$.

2. Démonstration de théorème

D'abord, nous mettons $z=x+\mathrm{i}y$, $u(x,y)=\mathrm{Re}\,P(z)$(la partie réelle de $P(z)$) et $v(x,y)=\mathrm{Im}P(z)$(la partie imaginaire de $P(z)$), où i désigne l'unité d'imaginaire. Alors, nous concidérons la fonction $w(x,y)=(u(x,y)^2+v(x,y)^2)/2$. Comme nous pouvons le voir facilement, la fonction $w(x,y)$ prend sa valeur minimale à quelque point (x_0,y_0). Évidément, il suffit de démontrer le théorème suivant au lieu du Théorème 1 pour notre but.

Théorème 2. *Il se trouve que* $w_0:=w(x_0,y_0)=0$.

Pour cela, nous préparons quelques lemmes. Commençons par le lemme suivant.

Lemme 1. Il se trouve que $\partial u/\partial x = \partial v/\partial y$, $\partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$.
Preuve. C'est presque évident.
Nous abrégeons ce lemme comme (C-R). Aussi, nous utilisons les notations suivantes pour une fonction $f(x,y)$: $f_0 = f(x_0, y_0)$ et $f_{p,q} = \partial^{p+q} f(x_0, y_0)/\partial x^p \partial y^q$.

Nous prennons ici le développement de Taylor de $w(x,y)$ au point (x_0, y_0) qui se termine par termes finis:

$$w(x_0+h, y_0+k) = w(x_0, y_0) + \Sigma_{1 \leq m \leq 2n} A_m(h,k)/m!,$$

où $A_m(h,k) = \Sigma_{0 \leq j \leq m}\, {}_mC_j\, w_{m-j,j}\, h^{m-j} k^j$ avec ${}_mC_j = m!/\{(m-j)!j!\}$. Nous avons facilement $w_{1,0} = w_{0,1} = 0$.

Lemme 2. *Si $w_0 \neq 0$, il se trouve que $u_{1,0} = u_{0,1} = v_{1,0} = v_{0,1} = 0$.*
Preuve. Nous avons facilement qu'il suit

$$u_{1,0}u_0 + v_{1,0}v_0 = 0$$

$$u_{0,1}u_0 + v_{0,1}v_0 = 0,$$

car $w_{1,0} = w_{0,1} = 0$. Si $w_0 \neq 0$, il se trouve que$(u_0, v_0) \neq (0,0)$, ce qui suit $u_{1,0}v_{0,1} - v_{1,0}u_{0,1} = 0$. Donc, en vertu de (C-R), nous avons ${u_{1,0}}^2 + {v_{1,0}}^2 = 0$ et ${u_{0,1}}^2 + {v_{0,1}}^2 = 0$, ce qui complète la preuve.

Lemme 3. *Supposons que $w_0 \neq 0$. Si $w_{p,q} = 0 (1 \leq p+q \leq r)$, alors il se trouve que $u_{p,q} = v_{p,q} = 0 (1 \leq p+q \leq r)$.*

Preuve. Nous le démontrons par induction en r. Pour $r = 1$, c'est déjà vu par Lemme 2. Supposons que notre assertion est vérifiée pour r, alors nous avons en vertu de formule de Leibniz

$$w_{p,q} = u_{p,q}u_0 + v_{p,q}v_0 = 0 \; (p+q = r+1).$$

Donc,en utilisant (C-R) encore comme dans la preuve de Lemme 2, nous pouvons avoir ${u_{p,q}}^2 + {v_{p,q}}^2 = 0 \; (p+q = r+1)$, ce qui complète la preuve.
Le lemme suivant est une généralisation de (C-R).

Lemme 4. *Soient p,q et r quelques entiers non-négatifs avec $r \leq p/2$. Alors il se trouve que*

$$\partial^{p+q} u/\partial x^{p-2r} \partial y^{q+2r} = (-1)^r \partial^{p+q} u/\partial x^p \partial y^q,$$

$$\partial^{p+q} v/\partial x^{p-2r} \partial y^{q+2r} = (-1)^r \partial^{p+q} v/\partial x^p \partial y^q.$$

Preuve. Il suffirait de démontrer seulement pour u. Nous voyons facilment $\partial^2 u/\partial x^2 = -\partial^2 u/\partial y^2$ et puis $\partial^{2r} u/\partial x^{2r} = (-1)^r \partial^{2r} u/\partial y^{2r}$, ce qui nous apporte ce que nous voulions.

Nous retournons à $w(x_0+h, y_0+k) = w(x_0, y_0) + \Sigma_{1 \leq m \leq 2n} A_m(h,k)/m!$. Nous avons déjà vu $A_1(h,k) = 0$ identiquement. Supposons ici que $A_r(h,k)(1 \leq r \leq m)$ s'annulent identiquement. Alors nous obtenons

$$w(x_0+h, y_0+k) = w(x_0, y_0) + A_{m+1}(h,k)/(m+1)! + R_{m+1}.$$

Ici, nous devons noter qu'il faut $A_{m+1}(h,k) \geq 0$, car $w(x_0, y_0)$ est la valeur minimale de $w(x,y)$, ce qui nous montre que m est impair, si $A_{m+1}(h,k)$ se n'annule pas identiquement. En effet, nous avons $A_{m+1}(-h,-k) = (-1)^{m+1} A_{m+1}(-h,-k)$. Ainsi, nous pouvons supposer que $m = 2s-1$. Donc, nous concidérons $A_{2s}(h,k) = \Sigma_{0 \leq j \leq 2s}\, {}_{2s}C_j w_{2s-j,j} h^{2s-j} k^j$. Nous le récrivons comme suit:

$$A_{2s}(h,k) = B_{2s}(h,k) + C_{2s}(h,k),$$

où

$$\begin{aligned} B_{2s}(h,k) &= \Sigma_{0 \leq r \leq s}\, {}_{2s-2r}C_{2r} w_{2s-2r,2r} h^{2s-2r} k^{2r} \\ C_{2s}(h,k) &= \Sigma_{1 \leq r \leq s}\, {}_{2s-2r+1}C_{2r-1} w_{2s-2r+1,2r-1} h^{2s-2r+1} k^{2r-1}. \end{aligned}$$

D'ailleurs, nous avons $u_{p,q} = v_{p,q} = 0(1 \leq p+q \leq 2s-1)$ du Lemme 3 sous l'hypothèse $w_0 \neq 0$, car $w_{p,q} = 0(1 \leq p+q \leq 2s-1)$, ce qui nous donne

$$w_{2s-r,r} = u_{2s-r,r} u_0 + v_{2s-r,r} v_0 \quad (0 \leq r \leq 2s).$$

De plus, nous obtenons en vertu de Lemme 4,

$$\begin{aligned} w_{2s-2r,2r} &= (-1)^r w_{2s,0}, \\ w_{2s-2r+1,2r-1} &= (-1)^{r-1} w_{2s-1,1}, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} B_{2s}(h,k) &= \Sigma_{0 \leq j \leq 2s} (-1)^r\, {}_{2s-2r}C_{2r} w_{2s-2r,2r} h^{2s-2r} k^{2r} \\ &= w_{2s,0}\, \Sigma_{0 \leq j \leq 2s}\, {}_{2s-2r}C_{2r} h^{2s-2r} k^{2r} \\ &= w_{2s,0}\, Re(h+ik)^{2s} \end{aligned}$$

et également

$$C_{2s}(h,k) = w_{2s-1,1}\, Im(h+ik)^{2s}.$$

Ici, nous notons que $w_{2s,0} \geq 0$, car $A_{2s}(h,0) \geq 0$. Nous donnons ici le lemme dernier.

Lemme 5. *Suppons que $w_0 \neq 0$. Si $A_r(h,k)(r=1,2,\ldots,m)$ s'annulent identiqument, alors aussi $A_{m+1}(h,k)$.*

Preuve. Il suffit de montrer pour $m = 2s-1$. Supposons que $w_{2s,0} > 0$. S'il existe un point

(h_0, k_0) tel que $Re(h_0+ik_0)^{2s}<0$, il faut $C_{2s}(h_0,k_0)>0$. Par ailleurs, il se trouve que $Re(h_0-ik_0)^{2s}=Re(h_0+ik_0)^{2s}>0$, ce qui nous apporte $C_{2s}(h_0,-k_0)=-C_{2s}(h_0,k_0)>0$. En prennant $(h_0,k_0)=(cos(\pi/2s), sin(\pi/2s))$, nous avons $Re(h_0+ik_0)^{2s}<0$, ce qui nous apporte une contradiction. Donc, nous avons $w_{2s,0}=0$, ce qui nous apporte $A_{2s}(h,k)=C_{2s}(h,k)$. Puis, ce que $A_{2s}(h,-k)=C_{2s}(h,-k)=-C_{2s}(h,k)\geq 0$ montre que $C_{2s}(h,k)=0$. Ainsi, nous voyons que $A_{2s}(h,k)$ s'annule identiqument.

En faisant la somme de séries des lemmes obtenus ci-dessus, nous pouvons sûrement verifier que notre assertion est correcte. En effet, si $w_0\neq 0$, il se trove que $w(x,y)=w(x_0,y_0)$, ce qui est une contradiction.

Départment de Technologie de Systéme Mécanique,
Faculté de Technologie et Dessin,
Insitut Technologique de Kyoto,
Matsugasaki, Sakyo-ku, Kyoto 606-8585