東京理科大学集中講義

数学特別講義1

井川 治 (京都工芸繊維大学)

2020年9月14日–18日

概 要

始めにJordan標準形を用いて行列の指数写像の性質を調べる．

次に線形Lie群のLie環を定義し，Lie環から線形Lie群への指数写像を用いて，個々の線形Lie群，特に，線形compact Lie群の性質を調べる．具体的な線形compact Lie群である特殊直交群,（特殊）ユニタリー群の連結性を示し，Weyl群やKilling形式について調べる．

最後に，これらの知識を利用して，球面，旗多様体，Grassmann多様体等が等質空間になることを示し，これらの等質空間としての表示を導く．

目 次

0　目的と到達目標

0.1　目的

この講義の目的は，Lie 環や Lie 群の一般論の知識を仮定せずに，線形代数学と微積分の知識のみを用いて具体的に与えられた線形 compact Lie 群の性質を調べることである．Lie 群や Lie 環の一般論を本格的に学ぶ前に，このような事柄に親しんでおくことは一般論の理解に大きく役立つと考えたからである．

学部の数学から大学院への数学の橋渡しになる講義を目指す．

0.2　到達目標

◯ 具体的に与えられた行列の指数写像が計算できるようになること．

◯ 具体的に与えられた線形 compact Lie 群の Lie 環，Killing 形式，Weyl 群が計算できるようになること．

1 Jordan 標準形と行列の指数・対数

1.1 行列の指数

この節の目的は X を与えられた n 次正方行列とし，n 次正方行列に値を持つ関数 $A(t)$ に関する微分方程式 $\dot{A}(t) = XA(t)$ を初期条件 $A(0) = 1$ (1 は n 次単位行列) の下で解くことである (定理 1.5)．$n = 1$ のとき，解は $A(t) = e^{tX}$ だから，この問題は指数関数の定義域を正方行列の場合に拡張することに他ならない．

後の節で線形 Lie 群の Lie 環を定義する際には，この節で述べる指数写像を用いる．

複素数 z を変数とする指数関数 e^z は

$$e^z = \exp z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} \quad (\text{収束半径}\ \infty)$$

とテーラー展開できる．右辺の級数は任意の z について e^z に収束する．上の式の z を n 次正方行列 X で置き換えた級数

$$\exp X = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{X^m}{m!} = E_n + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \cdots$$

について考える．与えられた正方行列 X に対して上の級数が収束するかどうかは問題であるが,[1]まず，いくつかの例について $\exp X$ を計算してみよう．

例 1.1. (1) n 次対角行列

$$X = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} \quad \text{に対して} \quad X^m = \begin{pmatrix} a_1^m & & \\ & \ddots & \\ & & a_n^m \end{pmatrix}$$

[1]この級数が収束するとは，部分和が収束することである．部分和が収束するとは，行列の各成分が収束することである．

となるから，

$$\exp X = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \begin{pmatrix} a_1^m & & \\ & \ddots & \\ & & a_n^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} a_1^m & & \\ & \ddots & \\ & & \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} a_n^m \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{a_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{a_n} \end{pmatrix}$$

(2) n 次上三角行列 N を

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$$

と定めると，$N^n = O$ となる．よって，

$$\exp tN = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{t^l N^l}{l!}$$

例題 1.1. n 次正方行列

$$J_n(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & & & O \\ 0 & \alpha & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad (\alpha \text{ は複素数})$$

に対して n 次上三角行列 N を

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$$

と定めると

$$\exp tJ_n(\alpha) = e^{t\alpha}\sum_{l=0}^{n-1}\frac{t^l N^l}{l!}$$

となることを示せ．

証明．$J_n(\alpha) = \alpha E_n + N$ で αE_n と N は可換だから，通常の二項定理が使えて，

$$(J_n(\alpha))^m = \sum_{k=1}^{m} {}_mC_k \alpha^{m-k} N^k$$

$N^n = O$ に注意して，

$$\begin{aligned}
\exp tJ_n(\alpha) &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{m!}\sum_{k=0}^{m} {}_mC_k\alpha^{m-k}N^k = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\frac{t^m}{m!}{}_mC_k\alpha^{m-k}N^k \\
&= \frac{t^0}{0!}{}_0C_0\alpha^0 E \\
&\quad + \frac{t^1}{1!}{}_1C_0\alpha^1 E + \frac{t^1}{1!}{}_1C_1\alpha^0 N \\
&\quad + \frac{t^2}{2!}{}_2C_0\alpha^2 E + \frac{t^2}{2!}{}_2C_1\alpha^1 N + \frac{t^2}{2!}{}_2C_2\alpha^0 N^2 \\
&\quad + \frac{t^3}{3!}{}_3C_0\alpha^3 E + \frac{t^3}{3!}{}_3C_1\alpha^2 N + \frac{t^3}{3!}{}_3C_2\alpha^1 N^2 + \frac{t^3}{3!}{}_3C_3\alpha^0 N^3 \\
&\quad + \cdots \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{m!}{}_mC_0\alpha^m E + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{t^m}{m!}{}_mC_1\alpha^{m-1}N + \sum_{m=2}^{\infty}\frac{t^m}{m!}{}_mC_3\alpha^{m-2}N^2 \\
&\quad + \sum_{m=3}^{\infty}\frac{t^m}{m!}{}_mC_3\alpha^{m-3}N^3 + \cdots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{m=k}^{\infty}\frac{t^m}{m!}{}_mC_k\alpha^{m-k}\right)N^k \quad (N\text{ のべきについて整理}) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{t^{k+l}}{(k+l)!}{}_{k+l}C_k\alpha^l\right)N^k \quad (N^n = 0) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{t^l\alpha^l}{l!}\right)\frac{t^k}{k!}N^k = e^{t\alpha}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^k}{k!}N^k
\end{aligned}$$

ゆえに主張が示された．(この場合には結果的に

$$\exp(tJ_n(\alpha)) = \exp(t(\alpha E_n + N)) = \exp(t\alpha E_n)\exp(tN)$$

となっている) $\square$

例題 1.1 で扱った正方行列 $J_n(\alpha)$ を **Jordan** 細胞という.[2]

問題 1.1. 次を示せ.

(1) 2 次交代行列

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ に対して } \exp tJ = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

(2) 2 次対称行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ に対して } \exp tA = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}.$$

(3) 成分が全て 1 の n 次正方行列

$$X = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \text{ に対して } \exp tX = E_n + \frac{1}{n}(e^{tn} - 1)X$$

問題 1.2. 次を示せ.

(1) $(a, b) \neq (0, 0)$ となる実数 a, b に対し，$\lambda = \sqrt{a^2 + b^2}$ とおく.

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

に対し，

$$\exp X = \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} \lambda \cosh \lambda + a \sinh \lambda & b \sinh \lambda \\ b \sinh \lambda & \lambda \cosh \lambda - a \sinh \lambda \end{pmatrix}$$

(2) $(c, d) \neq (0, 0)$ となる実数 c, d に対し，

$$Y = \begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix}$$

とおく．この Y と (1) の X について，$\exp X = \exp Y$ ならば，$X = Y$.

[2]細胞と言っても生物学とは関係ない．英語の Jordan cell の日本語訳.

任意の X について $\exp X$ は収束することを示したい．そのために線形代数でよく知られている事実を援用する．

定理 1.2. ([3, p. 178]) 複素数を成分とする任意の n 次正方行列 X に対して複素数を成分とする正則行列 P と Jordan 細胞 $J_{n_1}(\alpha_1), \cdots, J_{n_k}(\alpha_k)$ が存在して

$$X = P \begin{pmatrix} J_{n_1}(\alpha_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_k}(\alpha_k) \end{pmatrix} P^{-1}. \tag{1.1}$$

$J_{n_1}(\alpha_1), \cdots, J_{n_k}(\alpha_k)$ は X に対して順序を除き一意に定まる．

問題 1.3. 定理 1.2 中の $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ は X の固有値全部と一致することを示せ．

定理 1.3. (1) 任意の X について $\exp X$ は収束する．

(2) ${}^t(\exp X) = \exp({}^tX)$.

(3) $\det(\exp X) = \exp(\mathrm{tr}X) \neq 0$. 特に，$\exp X$ は正則である．

証明. (1) X を定理 1.2 の (1.1) の形に変形すると

$$\exp X = P \begin{pmatrix} \exp(J_{n_1}(\alpha_1)) & & \\ & \ddots & \\ & & \exp(J_{n_k}(\alpha_k)) \end{pmatrix} P^{-1}. \tag{1.2}$$

(2) 部分和について

$${}^t\left(\sum_{m=0}^{N} \frac{X^m}{m!}\right) = \sum_{m=0}^{N} \frac{({}^tX)^m}{m!}$$

$N \to \infty$ とすると，${}^t(\exp X) = \exp({}^tX)$.

(3) (1) の証明中の (1.2) 式を用いると

$$\begin{aligned} \det\,(\exp X) &= \det\,(\exp(J_{n_1}(\alpha_1)) \cdots \det\,(\exp(J_{n_k}(\alpha_k)) \quad ((1.2)\text{ 式}) \\ &= \exp(n_1\alpha_1) \cdots \exp(n_k\alpha_k) \quad (\text{例題 } 1.1) \\ &= \exp(n_1\alpha_1 + \cdots + n_k\alpha_k) \\ &= \exp(\mathrm{tr}\,(X)) \end{aligned}$$

ゆえに主張が示された． □

問題 1.4. $X \in M_n(\mathbb{C})$ について，次を示せ．

(1) $\overline{\exp X} = \exp \overline{X}$

(2) $\exp X^* = (\exp X)^*$

定数係数斉次線形微分方程式

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = 0$$

について考えよう．新しい未知関数 $y_0 = y, y_1, \cdots, y_{n-1}$ を導入するとこれは次の連立微分方程式と同値である．

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ -(a_1 y_{n-1} + \cdots + a_{n-1}y_1 + a_n y_0) \end{pmatrix}$$

ただし，左辺の列ベクトルの微分は各成分を微分することを表す．ここで，

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}$$

とおくと，この連立微分方程式は $\boldsymbol{y}' = X\boldsymbol{y}$ と表せる．

そこで X を与えられた n 次の正方行列とするとき，n 次列ベクトルを未知関数とする連立微分方程式

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{y} = X\boldsymbol{y}$$

について考えよう．

例題 1.2. n 次列ベクトル $\boldsymbol{y}(t)$ を未知関数とする連立微分方程式

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{y}(t) = J_n(\alpha)\boldsymbol{y}(t), \quad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0$$

の解は

$$\boldsymbol{y}(t) = \exp(tJ_n(\alpha))\boldsymbol{y}_0$$

によって与えられることを示せ．

証明．$\boldsymbol{y}(t)$ と $\boldsymbol{y}_0$ の第 i 成分をそれぞれ $y_i(t)$ と y_{i0} で表すと与えられた連立微分方程式は

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \alpha y_1 + y_2, \\ \vdots \\ \dot{y}_i = \alpha y_i + y_{i+1}, \\ \vdots \\ \dot{y}_{n-1} = \alpha y_{n-1} + y_n, \\ \dot{y}_n = \alpha y_n \end{cases}$$

と表される．最後の微分方程式 $\dot{y}_n = \alpha y_n$ より

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(e^{-\alpha t}y_n) &= e^{-\alpha t}\dot{y}_n - \alpha e^{-\alpha t}y_n \quad (\text{積の微分法}) \\ &= e^{-\alpha t}(\dot{y}_n - \alpha y_n) = 0 \end{aligned}$$

初期条件 $y_n(0) = y_{n0}$ を考慮して，$y_n = y_{n0}e^{\alpha t}$ が得られる．これを一つ上の微分方程式に代入して

$$\dot{y}_{n-1} - \alpha y_{n-1} = y_{n0}e^{\alpha t}.$$

積の微分法を用いて変形して

$$\frac{d}{dt}(e^{-\alpha t}y_{n-1}) = y_{n0}$$

積分して

$$y_{n-1} = e^{\alpha t}(y_{n0}t + y_{n-1,0})$$

これを帰納的に繰り返して

$$y_{i+1} = e^{\alpha t}\sum_{j=0}^{n-i-1}\frac{t^j}{j!}y_{i+j+1,0}$$

が得られたとすると，これを一つ上の微分方程式に代入して

$$\dot{y}_i = \alpha y_i + e^{\alpha t}\sum_{j=0}^{n-i-1}\frac{t^j}{j!}y_{i+j+1,0}$$

積の微分法を用いて変形して

$$\frac{d}{dt}(e^{-\alpha t}y_i) = \sum_{j=0}^{n-i-1} \frac{t^j}{j!} y_{i+j+1,0}$$

積分して

$$y_i = e^{\alpha t}\left(\sum_{j=0}^{n-i-1} \frac{t^{j+1}}{(j+1)!} y_{i+j+1,0} + y_{i,0}\right) = e^{\alpha t}\sum_{j=0}^{n-i} \frac{t^j}{j!} y_{i+j,0}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y} &= e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{t^j}{j!} y_{j+1,0} \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^{n-i} \frac{t^j}{j!} y_{j+i,0} \\ \vdots \\ y_{n,0} \end{pmatrix} \\
&= e^{\alpha t}\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & t \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{y}_0 \\
&= \exp(tJ_n(\alpha))\boldsymbol{y}_0
\end{aligned}$$

よって主張が得られた． □

定理 1.4. X を n 次正方行列とする．n 次列ベクトル $\boldsymbol{y}(t)$ を未知関数とする連立微分方程式

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{y}(t) = X\boldsymbol{y}(t), \quad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0$$

の解は

$$\boldsymbol{y}(t) = \exp(tX)\boldsymbol{y}_0$$

によって与えられる．

証明. 定理 1.2 により X は (1.1) の形になる．未知関数を $\boldsymbol{z}(t) = P^{-1}\boldsymbol{y}(t)$ と変換すると $\boldsymbol{z}(t)$ に関する連立微分方程式

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{z}(t) = (P^{-1}XP)\boldsymbol{z}(t), \quad \boldsymbol{z}(0) = P^{-1}\boldsymbol{y}_0$$

が得られる．例題 1.2 より

$$\boldsymbol{z}(t) = \exp(tP^{-1}XP)P^{-1}\boldsymbol{y}_0 = P^{-1}(\exp tX)\boldsymbol{y}_0$$

よって $\boldsymbol{y}(t) = \exp(tX)\boldsymbol{y}_0$. □

$\exp : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C}); X \mapsto \exp X$ を**指数写像** (exponential mapping) という．$\exp(M_n(\mathbb{C})) \subset GL(n, \mathbb{C})$ が成り立つ．次の定理によって $M_n(\mathbb{C})$ 内の曲線 $\exp tX$ が特徴付けられる．

定理 1.5. $X \in M_n(\mathbb{C})$ に対して $M_n(\mathbb{C})$ 内の曲線 $A(t)$ を $A(t) = \exp tX$ と定めると ($A(t)$ は微分可能であり)，$A(t)$ は初期条件

$$A(0) = E_n \tag{1.3}$$

を満たす微分方程式

$$\dot{A}(t) = XA(t) \tag{1.4}$$

の解になる．逆に初期条件 (1.3) を満たす微分方程式 (1.4) の解は $A(t) = \exp tX$ に限られる．

証明. $A(t) = \exp tX$ とおくと $A(0) = E_n$ となることは明らかである．$\dot{A}(t) = XA(t)$ を満たすことを示す．$X = J_n(\alpha) = \alpha E_n + N$ の形であると仮定してよい．このとき

$$A(t) = e^{\alpha t}\sum_{l=0}^{n-1}\frac{t^l N^l}{l!}$$

なので

$$\begin{aligned}
\dot{A}(t) &= \alpha e^{\alpha t}\sum_{l=0}^{n-1}\frac{t^l N^l}{l!} + e^{\alpha t}\sum_{l=1}^{n-1}\frac{t^{l-1}N^l}{(l-1)!} \\
&= \alpha A(t) + e^{\alpha t}N\sum_{l=0}^{n-2}\frac{t^l N^l}{l!} \\
&= \alpha A(t) + e^{\alpha t}N\sum_{l=0}^{n-1}\frac{t^l N^l}{l!} \qquad (N^n = 0) \\
&= XA(t).
\end{aligned}$$

逆に $A(t)$ が $\dot{A}(t) = XA(t),\ A(0) = E_n$ を満たすと仮定して $A(t) = \exp tX$ となることを示す．$A = (\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \boldsymbol{a}_1)$ と表示すると与えられた微分方程式は

$$\dot{\boldsymbol{a}}_i = X\boldsymbol{a}_i, \quad \boldsymbol{a}_i(0) = \boldsymbol{e}_i$$

と書き換えられる．定理 1.4 より $\boldsymbol{a}_i = (\exp tX)\boldsymbol{e}_i$．ゆえに

$$A = ((\exp tX)\boldsymbol{e}_1\ \cdots (\exp tX)\boldsymbol{e}_n) = \exp tX$$

が得られる． □

系 1.6. (1) $XY = YX$ ならば $\exp(X+Y) = \exp X \exp Y$.

(2) $(\exp X)^{-1} = \exp(-X)$.

(3) $X \in M_n(\mathbb{R})$ が交代行列 $({}^tX = -X)$ ならば $\exp X \in SO(n)$.

証明. (1) $XY = YX$ より

$$(\exp tX)Y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n X^n}{n!} Y = Y \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n X^n}{n!} = Y \exp tX.$$

$A(t) = \exp tX \exp tY$ とおくと $A(0) = 1$ で

$$\dot{A}(t) = X \exp tX \exp tY + (\exp tX)Y \exp tY = (X+Y)A(t).$$

よって**定理 1.5** より $A(t) = \exp t(X+Y)$.

(2) $X(-X) = (-X)X = -X^2$ なので (1) より

$$\exp X \exp(-X) = \exp(-X) \exp X = \exp(X - X) = \exp 0 = 1.$$

ゆえに $(\exp X)^{-1} = \exp(-X)$.

(3) $X \in M_n(\mathbb{R})$ を交代行列とすると

$$\begin{aligned} (\exp X)^{-1} &= \exp(-X) && ((2)\ \text{より}) \\ &= \exp {}^tX && (X\text{: 交代}) \\ &= {}^t(\exp X) && (\text{定理 } 1.3,(2)) \end{aligned}$$

よって，$\exp X \in O(n)$．$\mathrm{tr}\ X = 0$ なので定理 1.3,(3) より

$$\det(\exp X) = \exp(\mathrm{tr} X) = 1.$$

よって，$\exp X \in SO(n)$． □

上の系の (3) は $X \in M_n(\mathbb{R})$ が交代行列のとき，$\exp X$ が特殊直交行列になることを示している．

問題 1.5. **定理 1.5** と**定理 1.3**, (2) を用いて次を示せ．$X \in M_n(\mathbb{C})$ とする．$M_n(\mathbb{C})$ 内の曲線 $C(t)$ が初期条件 $C(0) = 1$ を満たす微分方程式 $\dot{C}(t) = C(t)X$ の解ならば $C(t) = \exp tX$ となる．

問題 1.6. 次の行列 A について $\exp tA$ を求めよ．

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \qquad\qquad (2) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

問題 1.7. $a^2 + b^2 > 0$ となる実数 a, b に対して，3 次正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a & 0 \\ a & 0 & -b \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$$

と定める．このとき，$\exp tA$ を求めよ．

問題 1.8. 定理 1.5 を用いて公式 $\exp(s+t)X = \exp sX \exp tX$ を示せ．

問題 1.9.

$$\begin{aligned} \mathrm{Sym}(2) &= \{X \in M_2(\mathbb{R}) \mid {}^tX = X\}, \\ \mathrm{Sym}^+(2) &= \{X \in \mathrm{Sym}(2) \mid X \text{ は正定値 }\}, \\ GL^+(2, \mathbb{R}) &= \{X \in GL(2, \mathbb{R}) \mid |X| > 0\} \end{aligned}$$

とおく．次を示せ．

(1) $\exp : \mathrm{Sym}(2) \to \mathrm{Sym}^+(2); X \mapsto \exp X$ は全単射である．

(2) [$GL^+(2, \mathbb{R})$ の極分解] $SO(2) \times \mathrm{Sym}(2) \to GL^+(2, \mathbb{R}); (g, X) \mapsto g \exp X$ は全単射である．

問題 1.10. [前問の続き]

$$\begin{aligned} \mathrm{Sym}^0(2) &= \{X \in \mathrm{Sym}(2) \mid \mathrm{tr}(X) = 0\}, \\ S(\mathrm{Sym}^+(2)) &= \{X \in \mathrm{Sym}^+(2) \mid |X| = 1\} \end{aligned}$$

とおく．次を示せ．

(1) $\exp : \mathrm{Sym}^0(2) \to S(\mathrm{Sym}^+(2)); X \mapsto \exp X$ は全単射である．

(2) $[SL(2,\mathbb{R})$ の極分解$]$ $SO(2)\times\mathrm{Sym}^0(2) \to SL(2,\mathbb{R}); (g,X) \mapsto g\exp X$ は全単射である．

問題 1.11. 写像

$$
\begin{aligned}
&SO(2) \times \mathbb{R}^2 \to SL(2,\mathbb{R});\\
&\left(\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}, (s,t)\right) \mapsto \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^t & se^t\\ 0 & e^{-t}\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

は全単射であることを示せ．

<u>全射を示すヒント</u>

$x = \begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$ に対し，$R = \frac{1}{\sqrt{x_{11}^2+x_{21}^2}}\begin{pmatrix}x_{11} & -x_{21}\\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix}$ とおき，$R^{-1}x$ を計算する．

1.2 行列の対数

行列の対数を定義するために，まず，通常の対数を復習しよう．$|w| < 1$ のとき，対数関数 $\log(1+w)$ は

$$\log(1+w) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} w^m$$

とテーラー展開された．$z = 1 + w$ とおくと，$|z-1| < 1$ のとき，

$$\log z = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} (z-1)^m$$

そこで，正方行列 $A \in M_n(\mathbb{C})$ に対して，

$$\log A = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} (A-E_n)^m$$

と定義する．この定義は無限級数なので，$\log A$ がいつ収束するかは問題になるが，それを議論する前にいくつかの具体的な行列 A について $\log A$ を計算してみよう．

例 1.7. A が対角行列

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} \qquad (|a_j - 1| < 1)$$

の場合，

$$\log A = \begin{pmatrix} \log a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \log a_n \end{pmatrix}$$

Jordan 細胞の対数を計算するために次の補題が必要である．

補題 1.8. $|\alpha| < 1$ を満たす $\alpha \in \mathbb{C}$ に対し，

$$f_k(\alpha) = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^{l+k-1}{}_{l+k-1}C_l(\alpha - 1)^l \quad (k = 1, 2, 3, \cdots)$$

とおくと，$f_k(\alpha) = (-1)^{k-1}\alpha^{-k}$

証明. 自然数 k に関する数学的帰納法による．$k = 1$ のとき，$f_1(\alpha)$ は初項 1，公比 $1 - \alpha$ の無限等比級数なので，$f_1(\alpha) = \alpha^{-1}$．簡単な計算により

$$f_{k+1}(\alpha) = \frac{1}{k} f_k'(\alpha)$$

これを用いて主張が示される． □

Jordan 細胞の対数は次で与えられる．

命題 1.9. $|\alpha - 1| < 1$ のとき，$J_n(\alpha) = \alpha E_n + N$ の対数は，

$$\begin{aligned} \log J_n(\alpha) &= (\log \alpha)E_n + \log(E_n + \frac{1}{\alpha}N) \\ &= (\log \alpha)E_n + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \frac{\alpha^{-k}}{k} N^k \end{aligned}$$

証明. E_n と N は可換だから，二項定理により

$$
\begin{aligned}
&\log J_n(\alpha)\\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \sum_{k=0}^{m} {}_mC_k (\alpha-1)^{m-k} N^k\\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^{m-1}}{m} {}_mC_k (\alpha-1)^{m-k} N^k\\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} (\alpha-1)^m E_n + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=k}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} {}_mC_k (\alpha-1)^{m-k} N^k\\
&= (\log\alpha) E_n + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l+k-1}}{l+k} {}_{l+k}C_k (\alpha-1)^l N^k\\
&= (\log\alpha) E_n + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l+k-1}}{l+k} {}_{l+k}C_k (\alpha-1)^l N^k\\
&= (\log\alpha) E_n + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^{l+k-1} {}_{l+k-1}C_l (\alpha-1)^l \frac{N^k}{k} \qquad (N^n = 0)\\
&= (\log\alpha) E_n + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \frac{\alpha^{-k}}{k} N^k \qquad (\text{補題 } 1.8)\\
&= (\log\alpha) E_n + \log(E_n + \frac{1}{\alpha} N)
\end{aligned}
$$

□

次の二つの命題は行列の指数と対数が互いに逆関数となることを示している.

命題 1.10. $|\alpha - 1| < 1$ のとき，$\exp\log J_n(\alpha) = J_n(\alpha)$.

証明. E_n と $\log(E_n + \frac{1}{\alpha}N)$ は可換だから，命題 1.9 より

$$\exp\log J_n(\alpha) = \exp(\log\alpha)\exp\log(E_n + \frac{1}{\alpha}N) = \alpha\exp\log(E_n + \frac{1}{\alpha}N)$$

$\exp\log(1+x) = 1+x$ の左辺をテーラー展開すると，$|x| < 1$ のとき，

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \right)^m = 1 + x$$

よって形式的べき級数として

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \right)^m = 1 + x$$

が成り立つ．N はべき零行列だから

$$E_n + \frac{1}{\alpha} N = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{N^k}{k\alpha^k} \right)^m = \exp\log(E_n + \frac{1}{\alpha} N)$$

よって，

$$\exp\log J_n(\alpha) = \alpha \left(E_n + \frac{1}{\alpha} N \right) = J_n(\alpha)$$

□

命題 1.11. $|e^{\alpha} - 1| < 1$ のとき，$\log\exp J_n(\alpha) = J_n(\alpha)$**.**

証明. $J_n(\alpha) = \alpha E_n + N, N^n = O$ だから，

$$\exp J_n(\alpha) = e^{\alpha} \exp N = e^{\alpha} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{N^m}{m!}$$

対数をとり，

$$
\begin{aligned}
&\log\exp J_n(\alpha)\\
&=\log\left(e^\alpha E_n+e^\alpha\sum_{m=1}^{n-1}\frac{N^m}{m!}\right)\\
&=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^{l-1}}{l}\left\{(e^\alpha-1)E_n+e^\alpha\sum_{m=1}^{n-1}\frac{N^m}{m!}\right\}^l\\
&=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^{l-1}}{l}\left\{(e^\alpha-1)^lE_n+\sum_{k=1}^{l}{}_lC_k(e^\alpha-1)^{l-k}e^{\alpha k}(\sum_{m=1}^{n-1}\frac{N^m}{m!})^k\right\}\\
&=(\log e^\alpha)E_n+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=k}^{\infty}\frac{(-1)^{l-1}}{l}{}_lC_k(e^\alpha-1)^{l-k}e^{\alpha k}(\sum_{m=1}^{n-1}\frac{N^m}{m!})^k\\
&=\alpha E_n+\sum_{k=1}^{\infty}e^{\alpha k}(\sum_{m=1}^{n-1}\frac{N^m}{m!})^k\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{l+k-1}}{l+k}{}_{l+k}C_k(e^\alpha-1)^l\\
&=\alpha E_n+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{\alpha k}}{k}(\sum_{m=1}^{n-1}\frac{N^m}{m!})^k\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^{l+k-1}{}_{l+k-1}C_l(e^\alpha-1)^l\\
&=\alpha E_n+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(\sum_{m=1}^{n-1}\frac{N^m}{m!})^k \qquad (\text{補題 } 1.8)\\
&=\alpha E_n+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(\exp N-E_n)^k \qquad (\text{有限和})\\
&=\alpha E_n+N=J_n(\alpha)
\end{aligned}
$$

□

正方行列 $A=(a_{ij})$ の**ノルム** (norm) $\|A\|$ を

$$0\le\|A\|=\sqrt{\sum_{i,j}|a_{ij}|^2}$$

と定める．$t=0$ の近傍で $\|A\|/t^k$ が有界であることを $A(t)=O(t^k)$ と表す．

$g,h\in GL(n,\mathbb{C})$ に対し，g と h の**交換子** (commutator) を $\{g,h\}$ と表す：

$$\{g,h\}=ghg^{-1}h^{-1}$$

命題 1.12. 次が成り立つ．ただし，$[X,Y]=XY-YX$．

(1) $\exp tX \exp tY = \exp(t(X+Y)+O(t^2))$

(2) $\{\exp tX, \exp tY\} = \exp(t^2[X,Y]+O(t^3))$

証明. (1) exp の定義より

$$\begin{aligned}
\exp tX \exp tY &= (E + tX + \frac{t^2}{2}X^2 + O(t^2))(E + tY + \frac{t^2}{2}Y^2 + O(t^2)) \\
&= E + t(X+Y) + \frac{t^2}{2}(X+Y)^2 + O(t^3) \\
&= E + t(X+Y) + O(t^2) = \exp(t(X+Y)+O(t^2))
\end{aligned}$$

(2) (1) の証明中より

$$\begin{aligned}
\exp tX \exp tY &= E + t(X+Y) + \frac{t^2}{2}(X^2+2XY+Y^2) + O(t^3), \\
\exp(-tX)\exp(-tY) &= E - t(X+Y) + \frac{t^2}{2}(X^2+2XY+Y^2) + O(t^3)
\end{aligned}$$

上の二式をかけて

$$\begin{aligned}
\{\exp tX, \exp tY\} &= \exp tX \exp tY \exp(-tX)\exp(-tY) \\
&= E + t^2(X^2+2XY+Y^2-(X+Y)^2) + O(t^3) \\
&= E + t^2[X,Y] + O(t^3) \\
&= \exp(t^2[X,Y]+O(t^3))
\end{aligned}$$

□

命題 1.13. 次が成り立つ．

(1) $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\left(\exp\frac{X}{m}\exp\frac{Y}{m}\right)^m = \exp(X+Y).$

(2) $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\left\{\exp\frac{X}{m}, \exp\frac{Y}{m}\right\}^{m^2} = \exp[X,Y].$

証明. (1) 命題 1.12, (1) より

$$\exp\frac{X}{m}\exp\frac{Y}{m} = \exp\left(\frac{1}{m}(X+Y)+O(1/m^2)\right)$$

両辺を m 乗して

$$\left(\exp\frac{X}{m}\exp\frac{Y}{m}\right)^m = \exp(X+Y+mO(1/m^2))$$

$m \to \infty$ として，主張が得られる．

(2) 命題 1.12, (2) より

$$\left\{\exp\frac{X}{m}, \exp\frac{Y}{m}\right\} = \exp\left(\frac{1}{m^2}[X,Y]+O(1/m^3)\right)$$

両辺を m^2 乗して，

$$\left\{\exp\frac{X}{m}, \exp\frac{Y}{m}\right\}^{m^2} = \exp\left([X,Y]+m^2O(1/m^3)\right)$$

$m \to \infty$ として，主張が得られる． □

$GL(n,\mathbb{R})$ は $M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ の開集合なので，写像 $\varphi : GL(n,\mathbb{R}) \to GL(n,\mathbb{R})$ が可微分ということが意味をもつ．すなわち，$\varphi : GL(n,\mathbb{R}) \to GL(n,\mathbb{R})$ が**可微分**であるとは，$\varphi(g)$ の各成分が g の成分の n^2 変数関数として可微分となることである．同様に，$GL(n,\mathbb{C})$ は $M_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n^2} = \mathbb{R}^{2n^2}$ の開集合であるから，写像 $\varphi : GL(n,\mathbb{C}) \to GL(n,\mathbb{C})$ が可微分であるということも意味をもつ．すなわち，$\varphi : GL(n,\mathbb{C}) \to GL(n,\mathbb{C})$ が**可微分**であるとは，$\varphi(g)$ の各成分の実部及び虚部が g の成分の実部及び虚部の $2n^2$ 変数関数として可微分となることである．

$K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ とする．写像 $\varphi : GL(n,K) \to GL(n.K)$ が**準同型写像**であるとは，

$$\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h) \quad (g,h \in GL(n,K))$$

となるときを言う．

問題 1.12. $\varphi : GL(n,K) \to GL(n,K)$ が準同型写像ならば，$\varphi(E_n) = E_n$ となることを示せ．ただし，E_n は n 次単位行列である．

命題 1.14. $\varphi : GL(n,K) \to GL(n,K)$ を可微分準同型写像とする．このとき，任意の $X \in \mathfrak{gl}(n,K) := M_n(K)$ に対し，一意に $Y \in \mathfrak{gl}(n,K)$ が存在して，任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し，$\varphi(\exp tX) = \exp tY$ となる．

証明. $f(t) = \varphi(\exp tX)$ とおくと，φ の可微分性から t の関数 $f(t)$ は可微分で，問題 1.12 より，$f(0) = \varphi(E_n) = E_n$ が成り立つ．さらに，

$$\begin{aligned} f(s+t) &= \varphi(\exp(s+t)X) \qquad (f \text{ の定義}) \\ &= \varphi(\exp sX \exp tX) \qquad (\text{問題 } 1.8) \\ &= \varphi(\exp sX)\varphi(\exp tX) \qquad (\varphi\text{:準同型}) \\ &= f(s)f(t) \qquad (f \text{ の定義}) \end{aligned}$$

これを用いて，

$$\begin{aligned} f'(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(\Delta t)f(t) - f(0)f(t)}{\Delta t} \\ &= \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(\Delta t) - f(0)}{\Delta t} \right) f(t) = f'(0)f(t) \end{aligned}$$

定理 1.5 より，$Y \in \mathfrak{gl}(n, K)$ が存在して，$f(t) = \exp tY$．Y の一意性は明らかである． □

上の命題の Y を $Y = (d\varphi)X$ と表す：すなわち，可微分準同型写像 φ に対して，

$$\varphi(\exp tX) = \exp t(d\varphi)X, \quad (d\varphi)X = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \varphi(\exp tX)$$

定義 1.15. 可微分準同型写像 $\varphi : GL(n, K) \to GL(n, K)$ に対して，$d\varphi : \mathfrak{gl}(n, F) \to \mathfrak{gl}(n, F)$ を φ の**微分写像**という．

問題 1.13. 次を示せ．

(1) 恒等写像 $\mathbf{1} : GL(n, K) \to GL(n, K)$ の微分写像は恒等写像 $\mathbf{1} : \mathfrak{gl}(n, K) \to \mathfrak{gl}(n, K)$ である．

(2) 可微分準同型写像 $\varphi : GL(n, K) \to GL(n, K)$ が $\varphi^m = \mathbf{1}$ を満たすならば，$(d\varphi)^m = \mathbf{1}$ となる．

問題 1.14. 二つの可微分準同型写像 $\varphi_1, \varphi_2 : GL(n, K) \to GL(n, K)$ に対し，$d(\varphi_1\varphi_2) = (d\varphi_1)(d\varphi_2)$ が成り立つことを示せ．

問題 1.15. 次を示せ．

(1) $\varphi : GL(n, K) \to GL(n, K); g \mapsto {}^t g^{-1}$ は可微分準同型写像であることを示せ．また，$(d\varphi)X = -{}^t X$ となることを示せ．

(2) $\varphi : GL(n,\mathbb{C}) \to GL(n,\mathbb{C}); g \mapsto \overline{g}$ は可微分準同型写像であることを示せ．また，$(d\varphi)X = \overline{X}$ となることを示せ．

命題 1.16. 可微分準同型写像 $\varphi : GL(n,K) \to GL(n,K)$ の微分写像 $d\varphi : \mathfrak{gl}(n,K) \to \mathfrak{gl}(n,K)$ は線形写像で，

$$[(d\varphi)X, (d\varphi)Y] = d\varphi[X,Y] \qquad (X, Y \in \mathfrak{gl}(n,K))$$

を満たす．

証明. $a, t \in \mathbb{R}$ とする．$(ta)X = t(aX)$ より，

$$\exp(ta)(d\varphi X) = \varphi(\exp((ta)X)) = \varphi(\exp(t(aX))) = \exp t d\varphi(aX)$$

ゆえに，$a(d\varphi)X = d\varphi(aX)$．任意の自然数 m と実数 t に対し，

$$\varphi\left(\left(\exp\frac{tX}{m}\exp\frac{tY}{m}\right)^m\right) = \left(\exp\frac{t(d\varphi)X}{m}\exp\frac{t(d\varphi)Y}{m}\right)^m$$

両辺 $m \to \infty$ とすると，φ の連続性と命題 1.13, (1) より

$$\varphi(\exp t(X+Y)) = \exp t((d\varphi)X + (d\varphi)Y)$$

よって，$(d\varphi)(X+Y) = (d\varphi)X + (d\varphi)Y$．ゆえに，$d\varphi$ は線形写像である．

また，

$$\varphi\left(\left\{\exp\frac{tX}{m}, \exp\frac{Y}{m}\right\}^{m^2}\right) = \left\{\exp\frac{t(d\varphi)X}{m}, \exp\frac{(d\varphi)Y}{m}\right\}^{m^2}$$

の両辺を $m \to \infty$ とすると，φ の連続性と命題 1.13, (2) より

$$\exp t d\varphi[X,Y] = \exp t[(d\varphi)X, (d\varphi)Y]$$

よって，$d\varphi[X,Y] = [(d\varphi)X, (d\varphi)Y]$． □

問題 1.16. $a \in GL(n,K)$ に対し，可微分同型写像 $\varphi_a : GL(n,K) \to GL(n,K)$ を $\varphi_a(g) = aga^{-1}$ と定める．φ_a の微分写像 $d\varphi_a$ は

$$d\varphi_a(X) = aXa^{-1}$$

で与えられることを示せ．

定義 1.17. 上の問題中の $d\varphi_a$ を $\mathrm{Ad}(a)$ と表す：すなわち，

$$\mathrm{Ad}(a)X = aXa^{-1} \qquad (a \in GL(n,K), X \in \mathfrak{gl}(n,K))$$

$GL(n,K)$ の $\mathfrak{gl}(n,K)$ への上の作用を $GL(n,K)$ の**随伴作用** (adjoint action) という．

問題 1.17. $a, b \in GL(n,K), X, Y \in \mathfrak{gl}(n,K)$ に対して，次を示せ．

(1) $\mathrm{Ad}(ab) = \mathrm{Ad}(a)\mathrm{Ad}(b)$

(2) $\mathrm{Ad}(a^{-1}) = (\mathrm{Ad}(a))^{-1}$

(3) $\mathrm{Ad}(a)[X,Y] = [\mathrm{Ad}(a)X, \mathrm{Ad}(a)Y]$

1.3 実 Jordan 標準形

$a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$ に対し，$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ とするとき，

$$J_n(a,b) = \begin{pmatrix} A & E_2 & & & \\ & A & E_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & E_2 \\ & & & & A \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R})$$

とおく．Jordan 細胞 $J_n(\alpha)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ と $J_n(a,b)$ という形の行列を合わせて**実 Jordan 細胞**という．

定理 1.18. 任意の $X \in M_n(\mathbb{R})$ に対し，実 Jordan 細胞 $J_1, \cdots, J_s$ と $P \in GL(n,\mathbb{R})$ が存在して，

$$P^{-1}XP = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s \end{pmatrix}$$

となる．$J_1, \cdots, J_s$ は X に対して一意に定まる．

2 Lie 環

$K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ とする．

定義 2.1. K 上ベクトル空間 $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}$ 上の交代線形形式 $[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}; (X, Y) \mapsto [X, Y]$ の組 $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ])$ または簡単に $\mathfrak{g}$ が K 上 **Lie 環**であるとは，$[\ ,\ ]$ が **Jacobi の恒等式**

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \quad (X, Y, Z \in \mathfrak{g})$$

を満たす場合を言う．このとき，$[\ ,\ ]$ を **Lie ブラケット**と言う．$[\ ,\ ]$ の交代性から $[X, X] = 0$ が成り立つ．$\mathbb{R}$ 上 Lie 環を**実 Lie 環**，$\mathbb{C}$ 上 Lie 環を**複素 Lie 環**とも言う．

問題 2.1. $\mathfrak{g}$ を実 Lie 環とする．$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \{X + iY \mid X, Y \in \mathfrak{g}\}$ で実ベクトル空間 $\mathfrak{g}$ の複素化を表す．$X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{g}$ に対し，

$$[X_1 + iX_2, Y_1 + iY_2] = ([X_1, Y_1] - [X_2, Y_2]) + i([X_2, Y_1] + [X_1, Y_2]) \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$$

で $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ に $[\ ,\ ]$ を定義すると，$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ は複素 Lie 環になることを示せ．このとき，$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ を実 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の**複素化**という．

例 2.2. $\mathfrak{g}$ を K 上ベクトル空間とする．$[\ ,\ ]$ を任意の $X, Y \in \mathfrak{g}$ に対し，$[X, Y] = 0$ と定めると，$(\mathfrak{g}, [\ ,\ ])$ は Lie 環になる．これを**可換** Lie 環という．

例 2.3. K の元を成分とする n 次行列全体のなす K 上ベクトル空間を $\mathfrak{gl}(n, K)$ と表す．

$$[X, Y] = XY - YX \quad (X, Y \in \mathfrak{gl}(n, K))$$

と定めると $(\mathfrak{gl}(n, K), [\ ,\ ])$ は K 上 Lie 環になる．

V を K 上のベクトル空間とする．V 上の線形変換全体のなすベクトル空間を $\mathrm{End}(V)$ と表す．

$$[X, Y] = XY - YX \quad (X, Y \in \mathrm{End}(V))$$

と定めると，$\mathrm{End}(V)$ は Lie 環になる．この Lie 環を $\mathfrak{gl}(V)$ と表す．

例 2.4. $\mathbb{C}$ 上 Lie 環の係数体を $\mathbb{R}$ に制限したものは $\mathbb{R}$ 上 Lie 環になる．

命題 2.5. $X, Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ に対し，

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}\mathrm{Ad}(\exp tX)Y = XY - YX = [X, Y]$$

証明. Ad の定義より

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}(\exp tX)Y &= (\exp tX)Y(\exp tX)^{-1} \qquad (\text{定義 } 1.17)\\ &= (\exp tX)Y(\exp(-tX)) \qquad (\text{系 } 1.6,\ (2))\end{aligned}$$

行列の積に関する積の微分法を用いて，$t = 0$ における微分係数を計算すると，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}|_{t=0}\mathrm{Ad}(\exp tX)Y &= \frac{d}{dt}|_{t=0}(\exp tX)Y + Y\frac{d}{dt}|_{t=0}(\exp(-tX))\\ &= XY - YX \qquad (\text{定理 } 1.5)\end{aligned}$$

主張が得られる． □

定義 2.6. $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ])$ を K 上 Lie 環とする．部分空間 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ が $\mathfrak{g}$ の**部分環**であるとは任意の $X, Y \in \mathfrak{h}$ に対し $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ となるときを言う．この条件を簡単に $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$ と表す．また，部分空間 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ が**イデアル**であるとは，$X \in \mathfrak{h}, Y \in \mathfrak{g}$ に対し $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ となる場合を言う．この条件を簡単に $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$ と表す．

K 上 Lie 環 $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ])$ の部分環 $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の Lie ブラケット $[\ ,\ ]$ を $\mathfrak{h}$ 上に制限することにより K 上 Lie 環になる．$\mathfrak{g}$ のイデアルは $\mathfrak{g}$ の部分環である．

定義 2.7. K 上 Lie 環 $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ])$ の**中心** $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ とは

$$\begin{aligned}\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) &= \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] = 0 \quad (Y \in \mathfrak{g})\}\\ &= \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, \mathfrak{g}] = \{0\}\}\end{aligned}$$

によって定義される $\mathfrak{g}$ のイデアルである．

$\mathfrak{g}$ が可換になるための必要十分条件は $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ となることである．

例 2.8. $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ の部分空間 $\mathfrak{so}(n)$ を

$$\mathfrak{so}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid {}^tX = -X\}$$

と定めると，$\mathfrak{so}(n)$ は $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ の部分環になる．$n = 2$ のとき，$\mathfrak{so}(2)$ は可換であり，$n \geq 3$ のとき，$\mathfrak{z}(\mathfrak{so}(n)) = \{0\}$ となる．

例 2.9. 複素 Lie 環 $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ の係数体 $\mathbb{C}$ を $\mathbb{R}$ に制限した実 Lie 環の部分空間 $\mathfrak{u}(n)$ を

$$\mathfrak{u}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \mid X^* = -X\}$$

と定義する．$\mathfrak{u}(n)$ は$\overline{\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})\text{ の複素部分空間にはならない}}$ことに注意する．$\mathfrak{u}(n)$ は実 Lie 環になる．$\mathfrak{z}(\mathfrak{u}(n)) = \mathbb{R}\sqrt{-1}E_n$ が成り立つ．特に，$n=1$ のとき，$\mathfrak{u}(1)$ は可換である．

例 2.10. $\mathfrak{u}(n)$ の部分空間 $\mathfrak{su}(n)$ を

$$\mathfrak{su}(n) = \{X \in \mathfrak{u}(n) \mid \mathrm{tr}(X) = 0\}$$

と定めると，$\mathfrak{su}(n)$ は $\mathfrak{u}(n)$ の部分環である．

$$\mathfrak{u}(n) = \mathfrak{su}(n) \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{u}(n))$$

が成り立つ．このことから，$\mathfrak{su}(n)$ は $\mathfrak{u}(n)$ のイデアルであることがわかる．

例 2.11. $\mathfrak{u}(2n)$ の部分空間 $\mathfrak{sp}(n)$ を

$$\mathfrak{sp}(n) = \{X \in \mathfrak{u}(2n) \mid {}^tXJ_n + J_nX = 0\}, \qquad J_n = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

と定めると，$\mathfrak{sp}(n)$ は $\mathfrak{u}(2n)$ の部分環である．

定義 2.12. $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ])$ を K 上 Lie 環とする．$\mathfrak{g}$ 上の線形変換 $D \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ が $\mathfrak{g}$ の**微分** (derivation) であるとは，

$$D[X,Y] = [DX,Y] + [X,DY] \quad (X,Y \in \mathfrak{g})$$

が成り立つ場合をいう．$X \in \mathfrak{g}$ に対し，$\mathrm{ad}(X) \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ を $\mathrm{ad}(X)(Y) = [X,Y]$ $(Y \in \mathfrak{g})$ により定めると，Jacobi の恒等式から，$\mathrm{ad}(X)$ は微分になる．この形の微分を**内部微分** (inner derivation) という．

$\mathfrak{g}$ の微分の全体のなす集合を $\partial(\mathfrak{g})$ と表す．また，$\mathfrak{g}$ の内部微分全体のなす集合を $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ と表す．

可換 Lie 環 $\mathfrak{g}$ について，$\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) = \{0\}$ である．

問題 2.2. $X, Y \in \mathfrak{g}$ について，$\mathrm{ad}[X,Y] = [\mathrm{ad}(X), \mathrm{ad}(Y)]$．

問題 2.3. 次を示せ．

(1) $\partial(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ の部分環である．

(2) $D \in \partial(\mathfrak{g})$ と $X \in \mathfrak{g}$ に対し，$\mathrm{ad}(DX) = [D, \mathrm{ad}X]$.

(3) $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ は $\partial(\mathfrak{g})$ のイデアルである．

$\mathfrak{g}$ 上の対称双一次形式 B を

$$B(X, Y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)) \in K \qquad (X, Y \in \mathfrak{g})$$

と定める．B を $\mathfrak{g}$ の **Killing 形式** (Killing form) という．

線形同型写像 $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ が (Lie 環 $\mathfrak{g}$ の) **自己同型写像**であるとは，

$$\varphi([X, Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)] \qquad (X, Y \in \mathfrak{g})$$

となるときをいう．

命題 2.13. $\mathfrak{g}$ の任意の自己同型写像 φ に対して，次が成り立つ．

(1) $\mathrm{ad}(\varphi(X)) = \varphi(\mathrm{ad}(X))\varphi^{-1} \qquad (X \in \mathfrak{g})$

(2) $B(\varphi(X), \varphi(Y)) = B(X, Y) \qquad (X, Y \in \mathfrak{g})$

証明. (1) $X, Y \in \mathfrak{g}$ に対し，

$$\mathrm{ad}(\varphi(X))(Y) = [\varphi(X), Y] = \varphi[X, \varphi^{-1}(Y)] = (\varphi(\mathrm{ad}(X))\varphi^{-1})(Y)$$

よって，$\mathrm{ad}(\varphi(X)) = \varphi(\mathrm{ad}(X))\varphi^{-1}$.

(2) (1) の結果を用いて，

$$\begin{aligned}
B(\varphi(X), \varphi(Y)) &= \mathrm{tr}((\mathrm{ad}(\varphi(X))(\mathrm{ad}(\varphi(Y))) && (B \text{ の定義}) \\
&= \mathrm{tr}(\varphi(\mathrm{ad}(X))\varphi^{-1}\varphi(\mathrm{ad}(Y))\varphi^{-1}) && ((1) \text{ より}) \\
&= \mathrm{tr}(\varphi(\mathrm{ad}(X))(\mathrm{ad}(Y))\varphi^{-1}) \\
&= \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X))\mathrm{ad}(Y))) && (\text{公式 } \mathrm{tr}(ST) = \mathrm{tr}(TS)) \\
&= B(X, Y) && (B \text{ の定義})
\end{aligned}$$

よって，$B(\varphi(X), \varphi(Y)) = B(X, Y)$. □

定義 2.14. K 上の Lie 環 $\mathfrak{g} \neq \{0\}$ が**半単純** (semisimple) であるとは，Killing 形式が非退化となるときをいう．

半単純 Lie 環の中心は $\{0\}$ である．

可換 Lie 環の Killing 形式 B は $B=0$ である．したがって，可換 Lie 環は半単純ではない．

命題 2.15. B を Lie 環 $\mathfrak{g}$ の Killing 形式とすると，

$$B([X,Y],Z) = -B(Y,[X,Z]) \qquad (X,Y,Z \in \mathfrak{g})$$

が成り立つ．

証明. 公式 $(*)\mathrm{tr}(ST) = \mathrm{tr}(TS)$ を用いて，

$$\begin{aligned}
B([X,Y],Z) &= \mathrm{tr}(\mathrm{ad}[X,Y]\mathrm{ad}Z) && (B \text{ の定義}) \\
&= \mathrm{tr}(\mathrm{ad}X\mathrm{ad}Y\mathrm{ad}Z) - \mathrm{tr}(\mathrm{ad}Y\mathrm{ad}X\mathrm{ad}Z) && (\text{問題 } 2.2) \\
&= \mathrm{tr}(\mathrm{ad}Y\mathrm{ad}Z\mathrm{ad}X) - \mathrm{tr}(\mathrm{ad}Y\mathrm{ad}X\mathrm{ad}Z) && (\text{公式 } (*)) \\
&= -B(Y,[X,Z])
\end{aligned}$$

よって，主張が示された． □

問題 2.4. $\mathfrak{h}$ を Lie 環 $\mathfrak{g}$ のイデアルとする．$\mathfrak{g}$ の Killing 形式を B と表す．このとき，次を示せ．

(1) B の $\mathfrak{h}$ への制限 (正確には $\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}$ への制限) は $\mathfrak{h}$ の Kiliing 形式に一致する．

(2) $\mathfrak{h}^{\perp} := \{X \in \mathfrak{g} \mid B(X,\mathfrak{h}) = \{0\}\}$ とおくと，$\mathfrak{h}^{\perp}$ も $\mathfrak{g}$ のイデアルである．

問題 2.5. [次元公式] V を実ベクトル空間，$\langle\ ,\ \rangle$ を V 上の対称双一次形式とする．部分空間 $W \subset V$ に対し，V の部分空間 $W^{\perp}$ を $W^{\perp} = \{v \in V \mid \langle v, W\rangle = \{0\}\}$ と定める．このとき，

$$\dim W + \dim W^{\perp} = \dim V + \dim(W \cap V^{\perp})$$

となることを示せ．また，$\langle\ ,\ \rangle$ が非退化のときには，

$$\dim W + \dim W^{\perp} = \dim V$$

となることを示せ．

命題 2.16. 半単純 Lie 環の可換イデアルは $\{0\}$ のみである．

証明. $\mathfrak{a}$ を半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の可換イデアルとする．このとき，

$$(\mathrm{ad}\mathfrak{a}\mathrm{ad}\mathfrak{g})\mathfrak{g} \subset (\mathrm{ad}\mathfrak{a})\mathfrak{g} \subset \mathfrak{a}, \qquad (\mathrm{ad}\mathfrak{a}\mathrm{ad}\mathfrak{g})\mathfrak{a} \subset (\mathrm{ad}\mathfrak{a})\mathfrak{a} = \{0\}$$

となるから，$B(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}\mathfrak{a}\mathrm{ad}\mathfrak{g}) = \{0\}$．$B$ は非退化だから，$\mathfrak{a} = \{0\}$ が得られる． □

系 2.17. 半単純 Lie 環の中心は $\{0\}$ である．

証明. 中心は可換イデアルだから，上の命題より主張が従う． □

命題 2.18. 半単純 Lie 環の任意の微分は内部微分である：$\partial(\mathfrak{g}) = \mathrm{ad}(\mathfrak{g})$.

証明. Lie 環 $\partial(\mathfrak{g})$ の Kiliing 形式 B に関する $\partial(\mathfrak{g})$ 自身と $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ の直交補空間をそれぞれ $\partial(\mathfrak{g})^\perp$ と $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})^\perp$ で表す：

$$\partial(\mathfrak{g})^\perp = \{D \in \partial(\mathfrak{g}) \mid B(D, \partial(\mathfrak{g})) = \{0\}\},$$
$$\mathrm{ad}(\mathfrak{g})^\perp = \{D \in \partial(\mathfrak{g}) \mid B(D, \mathrm{ad}(\mathfrak{g})) = \{0\}\}$$

このとき，次元公式 (問題 2.5)

$$\dim \mathrm{ad}(\mathfrak{g}) + \dim \mathrm{ad}(\mathfrak{g})^\perp = \dim \partial(\mathfrak{g}) + \dim(\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \cap \partial(\mathfrak{g})^\perp)$$

が成り立つ．$\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ と $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})^\perp$ は $\partial(\mathfrak{g})$ のイデアルだから (問題 2.3, (3) と問題 2.4, (2))，

$$[\mathrm{ad}(\mathfrak{g}), \mathrm{ad}(\mathfrak{g})^\perp] \subset \mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \cap \mathrm{ad}(\mathfrak{g})^\perp$$

$\mathrm{ad}(\mathfrak{g})^\perp$ の定義から，$B(\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \cap \mathrm{ad}(\mathfrak{g})^\perp, \mathrm{ad}(\mathfrak{g})) = \{0\}$．$B$ の $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ への制限は $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ の Killing 形式に一致する (問題 2.4, (1))．$\mathfrak{g}$ は半単純だから，$\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ と Lie 環として同型になり，したがって，$\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ の Killing 形式も非退化になる．上の議論から，

$$[\mathrm{ad}(\mathfrak{g}), \mathrm{ad}(\mathfrak{g})^\perp] = \mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \cap \mathrm{ad}(\mathfrak{g})^\perp = \{0\}$$

よって，問題 2.3, (2) の結果より，任意の $D \in \mathrm{ad}(\mathfrak{g})^\perp$ と $X \in \mathfrak{g}$ に対し，

$$0 = [D, \mathrm{ad}X] = \mathrm{ad}(DX)$$

よって，$D = 0$ が得られ，$\mathrm{ad}(\mathfrak{g})^\perp = \{0\}$ が成り立つ．初めに述べた次元公式に代入し，

$$\dim \partial(\mathfrak{g}) \leq \dim \mathrm{ad}(\mathfrak{g}) = \dim \partial(\mathfrak{g}) + \dim(\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \cap \partial(\mathfrak{g})^\perp) \leq \dim \partial(\mathfrak{g})$$

ゆえに，$\dim \partial(\mathfrak{g}) = \dim \mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ となり，$\partial(\mathfrak{g}) = \mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ が得られた． □

定義 2.19. 半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ が**単純** (simple) であるとは，$\mathfrak{g}$ のイデアルが $\{0\}$ または $\mathfrak{g}$ に限る場合をいう．

命題 2.20. $\mathfrak{g}$ を半単純 Lie 環とすると，$\mathfrak{g}$ の単純イデアル $\mathfrak{g}_1, \cdots, \mathfrak{g}_r$ が存在して，

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_r$$

証明. $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ のイデアルとし，$\mathfrak{g}$ の部分空間 $\mathfrak{h}^\perp$ を

$$\mathfrak{h}^\perp = \{X \in \mathfrak{g} \mid B(X, \mathfrak{h}) = \{0\}\}$$

と定める．$\mathfrak{g}$ の Killing 形式 B は非退化だから，

$$\dim \mathfrak{g} = \dim \mathfrak{h} + \dim \mathfrak{h}^\perp$$

が成り立つ (問題 2.5)．ここで，問題 2.4, (2) より，$\mathfrak{h}^\perp$ も $\mathfrak{g}$ のイデアルである．また，

$$B([\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^\perp, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^\perp], \mathfrak{g}) = B(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^\perp, [\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^\perp, \mathfrak{g}]) \subset B(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^\perp, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^\perp) = \{0\}$$

B は非退化だから，$[\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^\perp, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^\perp] = \{0\}$ が得られ，$\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^\perp$ は可換イデアルである．命題 2.16 より，$\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^\perp = \{0\}$．よって，

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^\perp \qquad (B \text{ に関する直交直和})$$

が成り立つ．B の $\mathfrak{h}, \mathfrak{h}^\perp$ への制限はそれぞれ $\mathfrak{h}, \mathfrak{h}^\perp$ の Killing 形式に一致する．これらはそれぞれ非退化になるので，$\mathfrak{h}, \mathfrak{h}^\perp$ は半単純イデアルである．ゆえに帰納的に主張が示される． □

定義 2.21. Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対して $[X, Y]$ $(X, Y \in \mathfrak{g})$ で張られる部分空間は $\mathfrak{g}$ のイデアルになる．このイデアルを $\mathfrak{g}$ の**導来環** (derived algebra) といい，$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ と表す.[3]

命題 2.22. 半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対して，$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ が成り立つ．

証明. まず，$\mathfrak{g}$ が単純のときに主張を示す．$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルだから，仮定より $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \{0\}$ または $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$．$\mathfrak{g}$ は可換ではないので，$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \neq \{0\}$ よって，$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$.

[3] $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \{[X, Y] \mid X, Y \in \mathfrak{g}\}$ ではないことに注意する．

次に，一般の場合に主張を示す．$\mathfrak{g} = \sum \mathfrak{g}_i$ と単純イデアルの直和に分解すると，各 $\mathfrak{g}_i$ は単純だから，上で述べたことから $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i] = \mathfrak{g}_i$．$i \neq j$ のとき，$[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_i \cap \mathfrak{g}_j = \{0\}$．ゆえに，$[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = \{0\}$．よって，

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \sum_{i,j} [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = \sum [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i] = \sum \mathfrak{g}_i = \mathfrak{g}$$

となり，主張が成り立つ． □

定義 2.23. Lie 環 $\mathfrak{g}$ が**簡約** (reductive) であるとは，$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ が半単純または $\{0\}$ で，$\mathfrak{g}$ がイデアルの直和

$$\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \oplus \mathfrak{z}$$

となる場合をいう．

命題 2.22 より，半単純 Lie 環は簡約である．

定義 2.24. 実 Lie 環 $\mathfrak{g}$ が **compact 半単純**であるとは，$\mathfrak{g}$ の Killing 形式 B が負定値となる場合をいう．[4]

compact 半単純 Lie 環は半単純である．

定義 2.25. compact 半単純 Lie 環が単純であるとき，それを **compact 単純 Lie 環**という．

問題 2.6. $\mathfrak{g} \neq \{0\}$ を Lie 環とし，B をその Killing 形式とする．B は正定値にはならないことを示せ．

定義 2.26. 実 Lie 環 $\mathfrak{g}$ が **compact** であるとは，$\mathfrak{g}$ が簡約であり，$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ が compact 半単純または $\{0\}$ であるときをいう．[5]

compact 半単純 Lie 環は compact Lie 環であり半単純 Lie 環でもある．

定義 2.27. 実 Lie 環 $\mathfrak{g}$ 上の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ が**不変内積**であるとは，

$$\langle [X, Y], Z \rangle = -\langle Y, [X, Z] \rangle$$

となるときをいう．

[4] この定義は一見すると普通の教科書の定義と異なるように見えるが実は同値である．予備知識をなるべく少なくするようにこのように変えた．普通の教科書では，compact かつ半単純の場合と定義している．

[5] この定義も一見すると普通の教科書の定義と異なるように見えるが実は同値である．予備知識をなるべく少なくするようにこのように変えた．

不変内積 $\langle\ ,\ \rangle$ に関して，$\mathrm{ad}(X)$ は交代的である：${}^t(\mathrm{ad}(X)) = -\mathrm{ad}(X)$.

定理 2.28. 実 Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対して，次は同値である．

(1) $\mathfrak{g}$ は compact である．

(2) $\mathfrak{g}$ には不変内積 $\langle\ ,\ \rangle$ が存在する．

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) 仮定より，$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 上の Killing 形式 B は負定値である．そこで $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 上の内積 $\langle\ ,\ \rangle_1$ を $\langle\ ,\ \rangle_1 = -B$ で定める．$\mathfrak{g}$ の中心 $\mathfrak{z}$ 上の任意の内積 $\langle\ ,\ \rangle_2$ を考える．仮定より，$\mathfrak{g} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \oplus \mathfrak{z}$ だから，$\mathfrak{g}$ 上の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を

$$\langle X_1 + X_2, Y_1 + Y_2\rangle = \langle X_1, X_2\rangle_1 + \langle X_2, Y_2\rangle_2 \quad (X_1, Y_1 \in [\mathfrak{g},\mathfrak{g}], X_2, Y_2 \in \mathfrak{z})$$

で定めることができる．この内積 $\langle\ ,\ \rangle$ が条件を満たす．

(2) $\Rightarrow$ (1) $\mathfrak{g}$ 上に不変内積 $\langle\ ,\ \rangle$ が存在したとする．$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ の直交補空間について，

$$\begin{aligned}[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]^\perp &= \{X \in \mathfrak{g} \mid \langle X, [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\rangle = \{0\}\} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \langle [X,\mathfrak{g}], \mathfrak{g}\rangle = \{0\}\} \\ &= \{X \in \mathfrak{g} \mid [X,\mathfrak{g}] = \{0\}\} = \mathfrak{z}\end{aligned}$$

よって，イデアルの直和

$$\mathfrak{g} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \oplus \mathfrak{z}$$

が成り立つ．$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ が $\neq \{0\}$ ならば，$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ は compact 半単純になることを示す．$\mathfrak{g}$ の Killing 形式 B の $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ への制限は $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ の Killing 形式に一致する．$X \in [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ に対して，

$$\begin{aligned}B(X,X) &= \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(X)) = -\mathrm{tr}({}^t\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(X)) \\ &\leq 0 \\ &\text{“}=\text{''} \Leftrightarrow X \in [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \cap \mathfrak{z} = \{0\}\end{aligned}$$

よって，$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ は compact 半単純である．ゆえに $\mathfrak{g}$ は compact である． □

問題 2.7. compact Lie 環の部分環は compact であることを示せ．

問題 2.8. 可換 Lie 環は compact になることを示せ．

3 線形 Lie 群とその Lie 環

$GL(n,\mathbb{C})$(または $GL(n,\mathbb{R})$) の閉部分群を**線形 Lie 群**という．G を線形 Lie 群とする．$\{g_m\}$ を G の点列で $\lim_{m\to\infty} g_m \in GL(n,\mathbb{C})$ (または $\in GL(n,\mathbb{R})$) が存在するならば，$\lim_{m\to\infty} g_m \in G$ が成り立つ．

これまでに扱った $GL(n,\mathbb{C}), GL(n,\mathbb{R}), U(n), SU(n), O(n), SO(n)$ はすべて線形 Lie 群である．

定理 3.1. 線形 Lie 群 G に対し，

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \mid \exp tX \in G \quad (t \in \mathbb{R})\}$$

とおくと，$\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ の実部分環になる．

証明. $X \in \mathfrak{g}, a \in \mathbb{R}$ とすると，任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し，$\exp t(aX) = \exp(ta)X \in G$．$\mathfrak{g}$ の定義より，$aX \in \mathfrak{g}$．

$X, Y \in \mathfrak{g}$ とし，$X+Y, [X,Y] \in \mathfrak{g}$ を示す．$t \in \mathbb{R}$ を任意の実数とする．命題 1.13, (1) より，

$$\exp t(X+Y) = \lim_{m\to\infty}\left(\exp\frac{tX}{m}\exp\frac{tY}{m}\right)^m$$

ここで，$X, Y \in \mathfrak{g}$ より，$\exp\frac{tX}{m}, \exp\frac{tY}{m} \in G$．$G$ は群だから，

$$\left(\exp\frac{tX}{m}\exp\frac{tY}{m}\right)^m \in G.$$

G は線形 Lie 群だから，

$$\exp t(X+Y) = \lim_{m\to\infty}\left(\exp\frac{tX}{m}\exp\frac{tY}{m}\right)^m \in G$$

$\mathfrak{g}$ の定義より，$X+Y \in \mathfrak{g}$．命題 1.13, (2) と G が線形 Lie 群であることから，

$$\exp t[X,Y] = \lim_{m\to\infty}\left\{\exp\frac{tX}{m}, \exp\frac{Y}{m}\right\}^{m^2} \in G$$

$\mathfrak{g}$ の定義より，$[X,Y] \in \mathfrak{g}$．以上で主張が示された． □

定理 3.1 中の $\mathfrak{g}$ を G の **Lie 環**という．線形 Lie 群 G が**半単純**であるとは，G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ が半単純になるときをいう．G が**単純**であるとは，$\mathfrak{g}$ が単純になるときをいう．

例 3.2. $K=\mathbb{R},\mathbb{C}$ とする．$GL(n,K)$ の Lie 環は $\mathfrak{gl}(n,K)$ である．線形 Lie 群 $SL(n,K)=\{g\in GL(n,K)\mid |g|=1\}$ の Lie 環は

$$\mathfrak{sl}(n,K)=\{X\in\mathfrak{gl}(n,K)\mid \mathrm{tr}(X)=0\}$$

である．$SL(n,\mathbb{R})$ を n 次実特殊線形群，$SL(n,\mathbb{C})$ を n 次複素特殊線形群という． □

例 3.3. $\mathbb{R}^{p+q}$ 上に次の非退化対称双一次形式 $\langle\ ,\ \rangle$ を定義する．

$x=\sum_{i=1}^{p}x_ie_i+\sum_{j=p+1}^{p+q}x_je_j, y=\sum_{i=1}^{p}y_ie_i+\sum_{j=p+1}^{p+q}y_je_j\in\mathbb{R}^{p+q}$ に対して，

$$\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{p}x_iy_i-\sum_{j=p+1}^{p+q}x_jy_j={}^t x\begin{pmatrix}I_p & \\ & -I_q\end{pmatrix}y$$

$\langle\ ,\ \rangle$ の符号数は (p,q) である．以後，$\mathbb{R}^{p+q}_p=(\mathbb{R}^{p+q},\langle\ ,\ \rangle)$ とおく．$\langle\ ,\ \rangle$ を保つ $GL(p+q,\mathbb{R})$ の部分群を $O(p,q)$ と表す：

$$\begin{aligned}O(p,q)&=\{g\in GL(p+q,\mathbb{R})\mid \langle gx,gy\rangle=\langle x,y\rangle\quad (x,y\in\mathbb{R}^{p+q})\}\\ &=\left\{g\in GL(p+q,\mathbb{R})\,\middle|\,{}^t g\begin{pmatrix}E_p & \\ & -E_q\end{pmatrix}g=\begin{pmatrix}E_p & \\ & -E_q\end{pmatrix}\right\}\end{aligned}$$

$O(p,q)$ の Lie 環 $\mathfrak{o}(p,q)$ は

$$\begin{aligned}\mathfrak{o}(p,q)&=\left\{X\in\mathfrak{gl}(p+q;\mathbb{R})\,\middle|\,{}^t X\begin{pmatrix}E_p & \\ & -E_q\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}E_p & \\ & -E_q\end{pmatrix}X=O\right\}\\ &=\left\{\begin{pmatrix}X_1 & X_2\\ {}^t X_2 & X_3\end{pmatrix}\,\middle|\,X_1\in\mathfrak{so}(p),X_3\in\mathfrak{so}(q),X_2\in M(p,q;\mathbb{R})\right\}\end{aligned}$$

問題 3.1. $g\in O(p+q)$ に対し，$|g|=\pm1$ となることを示せ．

上の問題を踏まえて，$O(p,q)$ の部分群 $SO(p,q)$ を

$$SO(p,q)=\{g\in O(p,q)\mid |g|=1\}$$

と定める．$g\in SO(p,q)$ を

$$g=\begin{pmatrix}g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{pmatrix},\quad g_{11}\in M_p(\mathbb{R}),g_{22}\in M_q(\mathbb{R})$$

と分解すると，$|g_{11}| \neq 0, |g_{22}| \neq 0$ となることが知られている ([1])．そこで，$SO(p,q)$ の部分群 $SO_0(p,q)$ を

$$SO_0(p,q) = \left\{ g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \in SO(p,q) \,\middle|\, |g_{11}| > 0, |g_{22}| > 0 \right\}$$

と定める． $\square$

問題 3.2. $SO(p,q), SO_0(p,q)$ の Lie 環は $\mathfrak{so}(p,q)$ に一致することを示せ．

4 種々の線形 compact 連結 Lie 群

4.1 実交代行列の特殊直交行列による標準形

成分を実数とする n 次交代行列の全体を $A(n)$ と表す．

問題 4.1. $A(n)$ は行列の和と実数倍に関して $\frac{n(n-1)}{2}$ 次元ベクトル空間になることを示せ．

$\mathbb{C}^n$ の標準 Hermite 内積を $\langle\ ,\ \rangle$ と表す．

まず，$n=2$ の場合を考えよう．$X \in A(2)$ は $a \in \mathbb{R}$ を用いて，

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

と表される．固有多項式は

$$f_X(t) = |tE_2 - X| = \begin{vmatrix} t & a \\ -a & t \end{vmatrix} = t^2 + a^2$$

固有値は $\pm ia$．以下，$a \neq 0$ と仮定する．固有値 $\pm ia$ に対する固有空間を $V(\pm ia)$ と表すと，

$$V(ia) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad V(-ia) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

このとき，

$$\langle V(ai), V(-ia) \rangle = \{0\}, \quad \overline{V(ai)} = \{\overline{u} \mid u \in V(ai)\} = V(-ia),$$
$$\mathbb{C}^2 = V(ai) \oplus V(-ia) \quad (\text{直交直和})$$

が成り立つ．このことは以下のように一般化される．

命題 4.1. $X \in A(n)$ に対して次が成り立つ.

(1) n が奇数ならば, X は固有値 0 をもつ.

(2) X の固有値 $\in \mathbb{C}$ は純虚数である.

(3) 純虚数 ia $(a \in \mathbb{R})$ が X の固有値ならば, $-ia$ も X の固有値であり, $V(ia) \subset \mathbb{C}^n$ で X の固有値 ia に対する固有空間を表すと, $V(ia) \to V(-ia); u \mapsto \overline{u}$ は実線形同型写像になる.

(4) ia と ib が X の固有値で $a \neq b$ ならば, $\langle V(ia), V(ib) \rangle = \{0\}$.

証明. (1) $n = 2m+1$ とおくと, 行列式の転置不変性から,

$$|X| = |{}^tX| = |-X| = (-1)^{2m+1}|X| = -|X|$$

よって, $|X| = 0$ となる. ゆえに X は固有値 0 をもつ.

(2) $u \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ を X の固有値 $\alpha \in \mathbb{C}$ に対する固有ベクトルとすると

$$\overline{\alpha}\|u\|^2 = \langle Xu, u \rangle = \langle u, X^*u \rangle = -\langle u, Xu \rangle = -\alpha\|u\|^2$$

ここで, $u \neq 0$ より, $\|u\|^2 > 0$. よって, $\overline{\alpha} = -\alpha$ が得られる. ゆえに X の固有値は純虚数である.

(3) $u \in V(ia)$ とすると,

$$X\overline{u} = \overline{Xu} = \overline{iau} = -ia\overline{u}$$

ゆえに, $\overline{u} \in V(-ia)$. 逆に, $v \in V(-ia)$ ならば $\overline{v} \in V(ia)$ であり, これらの実線形写像は互いに逆写像になる.

(4) $u \in V(ia), v \in V(ib)$ とすると,

$$\begin{aligned}-ia\langle u, v \rangle &= \langle iau, v \rangle = \langle Xu, v \rangle = \langle u, X^*v \rangle \\ &= -\langle u, Xv \rangle = -\langle u, ibv \rangle = -ib\langle u, v \rangle\end{aligned}$$

$a \neq b$ より, $\langle u, v \rangle = 0$. □

$X \in A(n), g \in O(n)$ に対して, ${}^tgXg \in A(n)$ である.

定理 4.2. 任意の $X \in A(n)$ に対して，$g \in SO(n)$ が存在して，

$$
{}^t gXg = \begin{pmatrix} 0 & -\theta_1 & & & & \\ \theta_1 & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & -\theta_m & \\ & & & \theta_m & 0 & \\ & & & & & (0) \end{pmatrix}
$$

最後の (0) は n が奇数のときのみ現われる．

証明. X の 0 以外の固有値全部を $\{\pm i\theta_j \mid 1 \leq j \leq k\}$ とする．$\mathbb{C}^n$ の複素部分空間 $V_\pm(\theta_j)$ を

$$V_\pm(\theta_j) = \{v \in \mathbb{C}^n \mid Xv = \pm i\theta_j v\}$$

と定める．また，$\mathbb{R}^n$ の実部分空間 $W(0)$ を

$$W(0) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid Xv = 0\}(= \{0\} \text{ かもしれない})$$

と定める．X は正規行列だからユニタリー行列で対角化可能である．よって，

$$\mathbb{C}^n = \sum_{j=1}^{k} (V_+(\theta_j) \oplus V_-(\theta_j)) \oplus V(0) \quad (\text{直交直和})$$

ただし，$V(0) = W(0) \oplus iW(0) = \{v \in \mathbb{C}^n \mid Xv = 0\}$．$\mathbb{R}^n$ の部分空間 $W(\theta_j)$ を

$$W(\theta_j) = (V_+(\theta_j) \oplus V_-(\theta_j)) \cap \mathbb{R}^n = \{u + \overline{u} \mid u \in V_+(\theta_j)\}$$

と定めると，$V_+(\theta_j) \mapsto W(\theta_j); u \mapsto u + \overline{u}$ は実線形同型写像だから，

$$\dim_\mathbb{R} W(\theta_j) = \dim_\mathbb{R} V_+(\theta_j) = 2\dim_\mathbb{C} V_+(\theta_j) = \dim_\mathbb{C} V_+(\theta_j) + \dim_\mathbb{C} V_-(\theta_j)$$

また，$\dim_\mathbb{R} W(0) = \dim_\mathbb{C} V(0)$．これらをすべて加え合わせると，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{k} \dim_\mathbb{R} W(\theta_j) + \dim_\mathbb{R} W(0) \\
&= \sum_{j=1}^{k} (\dim_\mathbb{C} V_+(\theta_j) + \dim_\mathbb{C} V_-(\theta_j)) + \dim_\mathbb{C} V(0) \\
&= \dim_\mathbb{C} \mathbb{C}^n = n
\end{aligned}
$$

よって，
$$\mathbb{R}^n = \sum_{j=1}^{k} W(\theta_j) \oplus W(0) \quad (\text{直交直和})$$
$u \in V_+(\theta_j)$ に対し，
$$X(u+\overline{u}) = Xu + \overline{Xu} = i\theta_j u - i\theta_j \overline{u} = \theta_j(iu - i\overline{u})$$
となるから，$W(\theta_j)$ は X-不変であり，$X(iu-i\overline{u}) = -\theta_j(u+\overline{u})$．これを利用して，$X|_{W(\theta_j)}$ の表現行列を求める．そのために $\{u_1, \cdots, u_l\}$ を複素部分空間 $V_+(\theta_j)$ の正規直交基底とする．このとき，$\{u_1, iu_1, \cdots, u_l, iu_l\}$ は $V_+(\theta_j)$ を実部分空間とみたものの基底である．このことと簡単な計算から
$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(u_1+\overline{u}_1), \frac{i}{\sqrt{2}}(u_1-\overline{u}_1), \cdots, \frac{1}{\sqrt{2}}(u_l+\overline{u}_l), \frac{i}{\sqrt{2}}(u_l-\overline{u}_l) \right\}$$
は $W(\theta_j)$ の正規直交基底になることがわかる．この正規直交基底に関する $X_{|W(\theta_j)}$ の表現行列は
$$\begin{pmatrix} 0 & -\theta_j & & & \\ \theta_j & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & -\theta_j \\ & & & \theta_j & 0 \end{pmatrix}$$
となる．これらの正規直交基底を並べて $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底 $\{g_1, \cdots, g_n\}$ を作り，$g = (g_1, \cdots, g_n)$ とおくと，$g \in O(n)$ であり，${}^t gXg$ は望む形になる．もし，$g \notin SO(n)$ ならば，関係式
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix}$$
を利用して g を $SO(n)$ の元に取り換えることができる． $\square$

$$\mathfrak{t} = \left\{ \left. \begin{pmatrix} 0 & -\theta_1 & & & & \\ \theta_1 & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & -\theta_m & \\ & & & \theta_m & 0 & \\ & & & & & (0) \end{pmatrix} \right| \theta_1, \cdots, \theta_m \in \mathbb{R} \right\}$$

とおくと，$\mathfrak{t}$ は $A(n)=\mathfrak{so}(n)$ の可換部分環であり，

$$\mathfrak{so}(n)=\mathrm{Ad}(SO(n))\mathfrak{t}$$

n が偶数，奇数に応じて，$n=2m, n=2m+1$ とおく．

$$H_i=E_{2i-1,2i}-E_{2i,2i-1} \qquad (1\le i\le m)$$

とおくと，

$$\mathfrak{t}=\sum_{i=1}^{m}\mathbb{R}H_i$$

$A_{jk}\in\mathfrak{so}(n)$ を

$$A_{jk}:=E_{jk}-E_{kj} \quad (1\le j,k\le 2m)$$

とおくと，

$$\begin{aligned}
[H_i,A_{2j,2k}]&=\delta_{ij}A_{2i-1,2k}-\delta_{ik}A_{2i-1,2j},\\
[H_i,A_{2j-1,2k}]&=\delta_{ik}A_{2j-1,2i-1}+\delta_{ij}A_{2k,2i},\\
[H_i,A_{2j-1,2k-1}]&=\delta_{ij}A_{2k-1,2i}+\delta_{ik}A_{2i,2j-1}
\end{aligned}$$

$1\le i<k\le m$ に対し，

$$F_{jk}^{\pm}:=A_{2j,2k}\mp A_{2j-1,2k-1},\quad G_{jk}^{\pm}:=A_{2j-1,2k}\mp A_{2k-1,2j}$$

とおくと，$[F_{jk}^{\pm},G_{jk}^{\pm}]=2(H_j\pm H_k)$．任意の $H=\sum x_iH_i\in\mathfrak{t}$ に対し，

$$[H,F_{jk}^{\pm}]=(x_j\pm x_k)G_{jk}^{\pm},\quad [H,G_{jk}^{\pm}]=-(x_j\pm x_k)F_{jk}^{\pm}$$

$n=2m$ のとき，

$$\mathfrak{so}(2m)=\mathfrak{t}\oplus\sum_{j<k}(\mathbb{R}F_{jk}^{+}\oplus\mathbb{R}G_{jk}^{+}\oplus\mathbb{R}F_{jk}^{-}\oplus\mathbb{R}G_{jk}^{-})$$

$n=2m+1$ のとき，$1\le j\le m$ に対し，

$$F_j:=E_{2j,2m+1}-E_{2m+1,2j},\quad G_j=E_{2j-1,2m+1}-E_{2m+1,2j-1}$$

とおくと，$[F_j,G_j]=H_j$ であり，

$$\mathfrak{so}(2m+1)=\mathfrak{t}\oplus\sum_{j<k}(\mathbb{R}F_{jk}^{+}\oplus\mathbb{R}G_{jk}^{+}\oplus\mathbb{R}F_{jk}^{-}\oplus\mathbb{R}G_{jk}^{-})\oplus\sum_{i=1}^{m}(\mathbb{R}F_j\oplus\mathbb{R}G_j)$$

任意の $H=\sum x_iH_i\in\mathfrak{t}$ に対し，

$$[H,F_j]=x_jG_j,\quad [H,G_j]=-x_jF_j$$

問題 4.2. 次を示せ.

(1) $\cos 2t = -1$ と $t \in \mathbb{R}$ をとるとき,

$$(\exp t\mathrm{ad}F_{jk}^{\pm})H_p = \begin{cases} \mp H_k & (p = j), \\ \mp H_j & (p = k), \\ H_l & (p \neq j, k) \end{cases}$$

(2) n が奇数のとき,

$$(\exp \pi\mathrm{ad}F_j^{\pm})H_p = \begin{cases} -H_j & (p = j), \\ H_l & (p \neq j) \end{cases}$$

問題 4.3. 次の条件をみたす $g \in SO(2m)$ は存在しないことを示せ : 任意の $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m \in \mathbb{R}$ に対して

$$\mathrm{Ad}(g)\begin{pmatrix} \theta_1 J & & & \\ & \theta_2 J & & \\ & & \ddots & \\ & & & \theta_m J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\theta_1 J & & & \\ & \theta_2 J & & \\ & & \ddots & \\ & & & \theta_m J \end{pmatrix}$$

ただし, $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

系 4.3. $H_0 \in \mathfrak{t}$ を

$$H_0 = \sum_{i=1}^{m} x_i H_i \quad (0 < x_1 < \cdots < x_m)$$

と定めると, $\mathfrak{t} = \{X \in \mathfrak{so}(n) \mid [H_0, X] = 0\}$.

系 4.3 中の H_0 を $\mathfrak{so}(n)$ の**正則元**という.

系 4.4. $\mathfrak{t}$ は $\mathfrak{so}(n)$ の極大可換部分環である.

証明. $X \in \mathfrak{so}(n)$ が $[X, \mathfrak{t}] = \{0\}$ を満たしたとすると, 正則元 $H_0 \in \mathfrak{t}$ について, $[X, H_0] = 0$. 系 4.3 より, $X \in \mathfrak{t}$. これは $\mathfrak{t}$ が極大可換部分環であることを示している. □

問題 4.4. $\mathfrak{so}(n)$ の上記で定めた極大可換部分環 $\mathfrak{t}$ に対し, 単位格子 $\Gamma = \{H \in \mathfrak{t} \mid \exp H = e\}$ を求めよ.

命題 4.5. $\mathfrak{so}(n)$ の Killing 形式 B は

$$B(X,Y) = (n-2)\mathrm{tr}(XY) \qquad (X, Y \in \mathfrak{so}(n))$$

で与えられる．$n \geq 3$ のとき，B は負定値である．特に，$n \geq 3$ のとき，$\mathfrak{so}(n)$ は compact 半単純 Lie 環である．

証明. $H = \sum x_i H_i \in \mathfrak{t}$ とする．

$n = 2m$ のとき，

$$\begin{aligned} B(H,H) &= \mathrm{tr}((\mathrm{ad}H)^2) = 2\sum_{j<k}(-(x_j - x_k)^2 - (x_j + x_k)^2) \\ &= -4(m-1)\sum_{j=1}^{m} x_j^2 = -2(n-2)\sum_{j=1}^{m} x_j^2 \end{aligned}$$

$n = 2m+1$ のとき，

$$B(H,H) = -4(m-1)\sum_{j=1}^{m} x_j^2 - 2\sum_{j=1}^{m} x_j^2 = -2(n-2)\sum_{j=1}^{m} x_j^2$$

n が偶数，奇数いずれの場合も

$$B(H,H) = -2(n-2)\sum_{j=1}^{m} x_j^2 = (n-2)\mathrm{tr}(H^2) \leq 0$$

任意の $X \in \mathfrak{so}(n)$ に対し，$g \in SO(n)$ と $H \in \mathfrak{t}$ が存在して，$X = \mathrm{Ad}(g)H$．このとき，

$$\begin{aligned} B(X,X) &= B(\mathrm{Ad}(g)H, \mathrm{Ad}(g)H) = B(H,H) = (n-2)\mathrm{tr}(H^2) \\ &= (n-2)\mathrm{tr}((\mathrm{Ad}(g)H)^2) = (n-2)\mathrm{tr}(X^2) \end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned} B(X,Y) &= \frac{1}{2}(B(X+Y, X+Y) - B(X,X) - B(Y,Y)) \\ &= \frac{n-2}{2}(\mathrm{tr}((X+Y)^2) - \mathrm{tr}(X^2) - \mathrm{tr}(Y^2)) \\ &= (n-2)\mathrm{tr}(XY) \end{aligned}$$

$n \geq 3$ のときは，$B(X,X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$ が成り立つ． $\square$

4.2　特殊直交行列の標準形

この節では n 次特殊直交行列の特殊直交行列による標準形について考察する．

まず，$n=2$ の場合について考えよう．

$$g=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\in SO(2)$$

とする．固有多項式は

$$f_g(t)=|tE_2-g|=\begin{vmatrix}t-\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & t-\cos\theta\end{vmatrix}=(t-\cos\theta)^2+\sin^2\theta$$

固有値は $e^{\pm i\theta}$．以下，$\theta\notin\pi\mathbb{Z}$ と仮定する．固有空間は

$$V(e^{i\theta})=\mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix},\quad V(e^{-i\theta})=\mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}$$

よって，

$$\mathbb{C}^2=V(e^{i\theta})\oplus V(e^{-i\theta})\quad(\text{直交直和}),\quad \overline{V(e^{i\theta})}=V(e^{-i\theta})$$

命題 4.6. $g\in SO(n)$ に対して次が成り立つ．

(1) n が奇数のとき，g は固有値 1 をもつ．

(2) $\alpha\in\mathbb{C}$ が g の固有値ならば，$|\alpha|=1$．

(3) $\alpha\in\mathbb{C}$ が X の固有値ならば，$\overline{\alpha}$ も X の固有値であり，それぞれに対する固有空間を $V(\alpha)$ と $V(\overline{\alpha})$ で表すと，$V(\alpha)\to V(\overline{\alpha}); u\mapsto\overline{u}$ は実線形同型写像になる．

(4) $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ が g の互いに異なる固有値ならば，それらの固有空間は $\mathbb{C}^n$ 内で直交する．

証明. (1) $n=2m+1$ とおく．$|g|=1$ より，

$$\begin{aligned}|g-E_{2m+1}|&=|g-E_{2m+1}||{}^tg|=|(g-E_{2m+1}){}^tg|=|g\,{}^tg-{}^tg|\\&=|E_{2m+1}-{}^tg|=|-({}^tg-E_{2m+1})|\\&=(-1)^{2m+1}|{}^tg-E_{2m+1}|=-|g-E_{2m+1}|\end{aligned}$$

よって，$|g-E_{2m+1}|=0$．ゆえに，g は固有値 1 をもつ．

(2) $u\in\mathbb{C}^n-\{0\}$ を g の固有値 α に対する固有ベクトルとすると，

$$0<\|u\|^2=\langle gu,gu\rangle=\langle\alpha u,\alpha u\rangle=|\alpha|^2\|u\|^2$$

よって，$|\alpha|=1$．

(3) $u\in V(\alpha)$ とすると，

$$g\overline{u}=\overline{gu}=\overline{\alpha u}=\overline{\alpha}\,\overline{u}$$

ゆえに，$\overline{u}\in V(\overline{\alpha})$．逆に，$v\in V(\overline{\alpha})$ ならば，$\overline{v}\in V(\alpha)$ であり，これらの実線形写像は互いに逆写像になる．

(4) $u,v\in\mathbb{C}^n$ をそれぞれ g の固有値 α,β に対する固有ベクトルとすると，

$$\langle u,v\rangle=\langle gu,gv\rangle=\overline{\alpha}\beta\langle u,v\rangle$$

$\alpha\neq\beta$ より $\overline{\alpha}\beta\neq 1$．よって，$\langle u,v\rangle=0$． □

定理 4.7. 任意の $g\in SO(n)$ に対して，$h\in SO(n)$ が存在して，

$$
{}^t hgh=\begin{pmatrix}
\cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & & & & \\
\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & & & & \\
 & & \ddots & & & \\
 & & & \cos\theta_m & -\sin\theta_m & \\
 & & & \sin\theta_m & \cos\theta_m & \\
 & & & & & (1)
\end{pmatrix}
$$

最後の (1) は n が奇数のときのみ現われる．

証明. g の 1 以外の固有値全部を $\{\alpha_1,\overline{\alpha}_1,\cdots,\alpha_k,\overline{\alpha}_k\}$ とし，$\alpha\in\mathbb{C}$ に対して，$\mathbb{C}^n$ の複素部分空間 $V(\alpha)$ を

$$V(\alpha)=\{v\in\mathbb{C}^n\mid gv=\alpha v\}$$

と定めると，

$$\mathbb{C}^n=\sum_{j=1}^{k}(V(\alpha_j)\oplus V(\overline{\alpha}_j))\oplus V(1)\quad(\text{直交直和})$$

$\mathbb{R}^n$ の実部分空間 $W(\alpha_j),W(1)$ を

$$W(\alpha_j)=\{u+\overline{u}\mid u\in V(\alpha_j)\},\quad W(1)=\{v\in\mathbb{R}^n\mid gv=v\}$$

と定めると，

$$\dim_{\mathbb{R}} W(\alpha) = \dim_{\mathbb{R}} V(\alpha_j) = 2\dim_{\mathbb{C}} V(\alpha_j) = \dim_{\mathbb{C}} V(\alpha_j) + \dim_{\mathbb{C}} V(\overline{\alpha}_j),$$
$$\dim_{\mathbb{R}} W(1) = \dim_{\mathbb{C}} V(1)$$

これらをすべて加え合わせると

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k} \dim_{\mathbb{R}} W(\alpha_j) + \dim_{\mathbb{R}} W(1) &= \sum_{j=1}^{k} (\dim_{\mathbb{C}} V(\alpha_j) + \dim_{\mathbb{C}} V(\overline{\alpha}_j)) + \dim_{\mathbb{C}} V(1) \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n = n = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

よって

$$\mathbb{R}^n = \sum_{j=1}^{k} W(\alpha_j) \oplus W(0) \quad (\text{直交直和})$$

複素部分空間 $V(\alpha_j)$ の正規直交基底を $\{u_1, \cdots, u_l\}$ とすると，

$$\{u_1, iu_1, \cdots, u_l, iu_l\}$$

は $V(\alpha_j)$ を実部分空間と見たものの基底となる．

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(u_1 + \overline{u}_1), \frac{i}{\sqrt{2}}(u_1 - \overline{u}_1), \cdots, \frac{1}{\sqrt{2}}(u_l + \overline{u}_l), \frac{i}{\sqrt{2}}(u_l - \overline{u}_l) \right\}$$

は $W(\alpha_j)$ の正規直交基底である．$\alpha_j = e^{i\theta_j}$ と表示すると，

$$g(\frac{1}{\sqrt{2}}(u_p + \overline{u}_p)) = \cos\theta_j(\frac{1}{\sqrt{2}}(u_p + \overline{u}_p)) + \sin\theta_j(\frac{i}{\sqrt{2}}(u_1 - \overline{u}_1)),$$
$$g(\frac{i}{\sqrt{2}}(u_p - \overline{u}_p)) = -\sin\theta_j(\frac{1}{\sqrt{2}}(u_p + \overline{u}_p)) + \cos\theta_j(\frac{i}{\sqrt{2}}(u_1 - \overline{u}_1))$$

よって，$g_{|W(\alpha_j)}$ の上の正規直交基底に関する表現行列は

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_j & -\sin\theta_j & & & \\ \sin\theta_j & \cos\theta_j & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \cos\theta_j & -\sin\theta_j \\ & & & \sin\theta_j & \cos\theta_j \end{pmatrix}$$

となる．$W(\alpha_j)(1 \leq j \leq k), W(0)$ のこれらの正規直交基底を並べて $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底 $\{h_1, \cdots, h_n\}$ を作り，$h = (h_1, \cdots, h_n) \in O(n)$ とおくと ${}^t hgh$ が求める形になる．$h \in O(n) - SO(n)$ のときは関係式

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}$$

を用いて，h を $h \in SO(n)$ と取り直せる． $\square$

系 4.8. $\exp(A(n)) = SO(n)$.

証明. [6]系 1.6 より $\exp(A(n)) \subset SO(n)$．定理 4.7 より，任意の $g \in SO(n)$ に対して，$h \in SO(n)$ が存在して，

$$g = h \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & & & & \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \cos\theta_m & -\sin\theta_m & \\ & & & \sin\theta_m & \cos\theta_m & \\ & & & & & (1) \end{pmatrix} {}^t h$$

ここで，

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -\theta_1 & & & & \\ \theta_1 & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & -\theta_m & \\ & & & \theta_m & 0 & \\ & & & & & (0) \end{pmatrix}$$

とおくと，$X \in A(n)$．よって，$hX^t h \in A(n)$ であり，

$$\exp(hX^t h) = h(\exp X)^t h = g.$$

$\square$

[6]標準形の話を使わないこれ以上易しい証明を知らない．

$GL(n,\mathbb{R})$ は位相空間 $M(n,\mathbb{R})$ の開集合である．$GL(n,\mathbb{R})$ に $M(n,\mathbb{R})$ の相対位相を入れる．例えば写像 $f:\mathbb{R}\to GL(n,\mathbb{R})$ が連続であるとは，$f(t)\in GL(n,\mathbb{R})$ の各成分が実数値関数として連続であることを意味する．

系 4.9. $SO(n)$ は $GL(n,\mathbb{R})$ の弧状連結な有界閉部分群である．

証明. $SO(n)=\{g\in M(n,\mathbb{R})\mid {}^tgg-E_n=0,|g|-1=0\}$ であり，${}^tgg-E_n,|g|-1$ は g の各成分の連続関数だから，$SO(n)$ は $GL(n,\mathbb{R})$ の閉部分群である．$g\in SO(n)$ に対し，$\|g\|=\sqrt{\mathrm{tr}({}^tgg)}=\sqrt{n}$ だから，$SO(n)$ は $M(n,\mathbb{R})$ の有界集合である．任意の $g\in SO(n)$ に対し，ある $X\in\mathfrak{so}(n)$ が存在して，$g=\exp X$．$c(t)=\exp tX$ は $SO(n)$ の単位元 E_n と X を結ぶ連続曲線だから，$SO(n)$ は弧状連結である． □

系 4.10. $\mathfrak{so}(n):=A(n)=\{X\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})\mid \exp tX\in SO(n)\ (t\in\mathbb{R})\}$

証明. $X\in\mathfrak{so}(n)$ とすると，

$$ {}^t(\exp tX)=\exp t{}^tX=\exp(-tX)=(\exp tX)^{-1} $$

よって，$\exp tX\in O(n)$．また，$|\exp tX|=\exp t\mathrm{tr}(X)=e^0=1$．ゆえに $\exp tX\in SO(n)$．

逆に，$X\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ が任意の $t\in\mathbb{R}$ に対し，$\exp tX\in SO(n)$ を満たしたとすると，

$$ \exp t{}^tX={}^t(\exp tX)=(\exp tX)^{-1}=\exp(-tX) $$

両辺の $t=0$ における微分係数を見比べて，${}^tX=-X$．ゆえに，$X\in\mathfrak{so}(n)$． □

$T=\exp\mathfrak{t}$ とおくと，

$$ T=\left\{\left.\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & & & & \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \cos\theta_m & -\sin\theta_m & \\ & & & \sin\theta_m & \cos\theta_m & \\ & & & & & (1) \end{pmatrix}\right| \theta_1,\cdots,\theta_m\in\mathbb{R}\right\} $$

$$ =\underbrace{S^1\times\cdots\times S^1}_{m\text{ 個}} $$

とおくと，T はトーラスであり，定理 4.7 より，

$$SO(n) = \bigcup_{g \in SO(n)} gTg^{-1}$$

命題 4.11. $X \in \mathfrak{so}(n)$ とする．任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して，$\exp tX \in T$ となるための条件は $X \in \mathfrak{t}$ である．

証明. $T = \exp \mathfrak{t}$ だから，($\Leftarrow$) は明らかである．($\Rightarrow$) を示す．$\exp tX$ は t の関数として微分可能だから，微分可能な関数 $a_j(t), b_j(t)$ で

$$a_j(0) = 1, \quad b_j(0) = 0, \quad a_j(t)^2 + b_j(t)^2 = 1$$

となるものが存在して，

$$\exp tX = \begin{pmatrix} a_1(t) & -b_1(t) & & & & \\ b_1(t) & a_1(t) & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & a_m(t) & -b_m(t) & \\ & & & b_m(t) & a_m(t) & \\ & & & & & (1) \end{pmatrix}$$

$\dot{a}_j(0) = 0$ が得られることに注意して両辺の $t = 0$ における微分係数に注目すると

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{b}_1(0) & & & & \\ \dot{b}_1(0) & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & -\dot{b}_m(0) & \\ & & & \dot{b}_m(t) & 0 & \\ & & & & & (0) \end{pmatrix} \in \mathfrak{t}$$

□

$SO(n)$ の部分群 $N(\mathfrak{t}), N(T)$ をそれぞれ

$$N(\mathfrak{t}) = \{g \in SO(n) \mid \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{t} = \mathfrak{t}\}, \quad N(T) = \{g \in SO(n) \mid gTg^{-1} = T\}$$

と定める．$N(\mathfrak{t}), N(T)$ それぞれの正規部分群 $Z(\mathfrak{t}), Z(T)$ を

$$Z(\mathfrak{t}) = \{g \in SO(n) \mid \mathrm{Ad}(g)H = H \quad (H \in \mathfrak{t})\},$$
$$Z(T) = \{g \in SO(n) \mid gt = tg \quad (t \in T)\}$$

と定める．

命題 4.12. $N(\mathfrak{t}) = N(T)$, $Z(\mathfrak{t}) = Z(T) = T$ が成り立つ.

証明. $g \in N(\mathfrak{t})$ とすると,

$$T = \exp \mathfrak{t} = \exp(\mathrm{Ad}(g)\mathfrak{t}) = g(\exp \mathfrak{t})g^{-1} = gTg^{-1}$$

ゆえに,$g \in N(T)$ となり $N(\mathfrak{t}) \subset N(T)$.逆に,$g \in N(T)$ とすると,任意の $H \in \mathfrak{t}, t \in \mathbb{R}$ に対し,$\exp t(\mathrm{Ad}(g)H) = g \exp tHg^{-1} \in T$.命題 4.11 より,$\mathrm{Ad}(g)H \in \mathfrak{t}$.ゆえに,$g \in N(\mathfrak{t})$.以上より,$N(\mathfrak{t}) = N(T)$ が得られた.同様にして,$Z(\mathfrak{t}) = Z(T)$ が得られる.T は可換群だから,$T \subset Z(T)$ が成り立つ.逆に,$g \in Z(\mathfrak{t})$ とし,

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1m} & (y_1) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ g_{m1} & \cdots & g_{mm} & (y_m) \\ (x_1) & \cdots & (x_m) & (z) \end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} (g_{ij} \in M_2(\mathbb{R}), y_j \in M(2,1;\mathbb{R}), \\ x_i \in M(1,2;\mathbb{R}), z \in \mathbb{R}) \end{matrix}$$

と表示する.

$$H = \begin{pmatrix} \theta_1 J & \cdots & 0 & (0) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \theta_m J & (0) \\ (0) & \cdots & (0) & (0) \end{pmatrix} \in \mathfrak{t}$$

に対し,

$$gH = \begin{pmatrix} \theta_1 g_{11} J & \cdots & \theta_m g_{1m} J & (0) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \theta_1 g_{m1} J & \cdots & \theta_m g_{mm} J & (0) \\ (\theta_1 x_1 J) & \cdots & (\theta_m x_m J) & (0) \end{pmatrix},$$

$$Hg = \begin{pmatrix} \theta_1 J g_{11} & \cdots & \theta_1 J g_{1m} & (\theta_1 J y_1) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \theta_m J g_{m1} & \cdots & \theta_m J g_{mm} & (\theta_m J y_{m1}) \\ (0) & \cdots & (0) & (0) \end{pmatrix}$$

よって,

$$\begin{aligned} g \in Z(\mathfrak{t}) &\Leftrightarrow \text{任意の } \theta_i, \theta_j \text{ に対し,} \theta_j J g_{ij} = \theta_i J g_{ij}, (x_i = 0, y_j = 0) \\ &\Leftrightarrow g_{ii} \in SO(2), g_{ij} = 0 \ (i \neq j), (x_i = 0, y_j = 0, z = 1) \\ &\Leftrightarrow g \in T \end{aligned}$$

ゆえに主張が成り立つ. □

商群 $W(T) = N(T)/Z(T) = N(T)/T$ を $SO(n)$ の T に関する **Weyl 群**という．Weyl 群 $W(T)$ は定義から T や $\mathfrak{t}$ に忠実に作用する.[7] この作用を具体的に記述しよう．

定理 4.13. $W(T)$ の $\mathfrak{t}$ への作用は次のようになる．

(1) $n = 2m+1$ のとき，任意の $s \in W(T)$ に対して，$\epsilon_i = \pm 1 (1 \le i \le m)$ と $\sigma \in S_m$ が存在して，$s(H_j) = \epsilon_j H_{\sigma(j)}$．逆に，任意の $\epsilon_i = \pm 1 (1 \le i \le m)$ と $\sigma \in S_m$ に対し，$\mathfrak{t}$ 上の線形変換 s を $s(H_j) = \epsilon_j H_{\sigma(j)}$ と定めると，$s \in W(T)$.

(2) $n = 2m$ のとき，任意の $s \in W(T)$ に対して，$\epsilon_1 \cdots \epsilon_m = 1$ を満たす $\epsilon_i = \pm 1 (1 \le i \le m)$ と $\sigma \in S_m$ が存在して，$s(H_j) = \epsilon_j H_{\sigma(j)}$．逆に，$\epsilon_1 \cdots \epsilon_m = 1$ を満たす任意の $\epsilon_i = \pm 1 (1 \le i \le m)$ と $\sigma \in S_m$ に対し，$\mathfrak{t}$ 上の線形変換 s を $s(H_j) = \epsilon_j H_{\sigma(j)}$ と定めると，$s \in W(T)$.

証明. $W(T)$ の $\mathfrak{t}$ への作用は，$\mathfrak{t}$ の元の固有値を変えないから，任意の $s \in W(T)$ に対して，$\epsilon_i = \pm 1 (1 \le i \le m)$ と $\sigma \in S_m$ が存在して，$s(H_j) = \epsilon_j H_{\sigma(j)}$.

(1) 逆の主張は問題 4.2, (2) から従う．

(2) 問題 4.3 から従う． □

問題 4.5. 定理 4.13, (1) を用いて $W(T)$ の群の構造を $S_m \times \{\pm 1\}^m$ に移して考えれば，

$$(\sigma_1, \epsilon_1^1, \cdots, \epsilon_m^1)(\sigma_2, \epsilon_1^2, \cdots, \epsilon_m^2) = (\sigma_1\sigma_2, \epsilon_{\sigma_2(1)}^1 \epsilon_1^2, \cdots, \epsilon_{\sigma_2(m)}^1 \epsilon_m^2)$$

となることを示せ．

[Weyl 群の重要性]　$G = SO(n)$ 上の関数 f で

$$f(gxg^{-1}) = f(x) \qquad (x, g \in G)$$

を満たすものを**類関数** (class function) という．たとえば，$\mathrm{tr}(x)$ は類関数である．f が類関数ならば，f の定義域を T に制限した関数 $f_{|T}$ は Weyl 群の作用で不変である．逆に φ を T 上の関数とすると

$$G = \bigcup_{g \in G} gTg^{-1}$$

[7] 忠実とは，$s \in W(T)$ が任意の $H \in \mathfrak{t}$ に対し，$sH = H$ を満たせば $s = 1$ となるときをいう．

であるから，φ を G 上の類関数として拡張する方法は一意である．下の定理より，この拡張が well-defined になるための必要十分条件は φ が Weyl 群の作用で不変になることである．すなわち，G 上の類関数全体と T 上の Weyl 群の作用で不変な関数全体が自然に対応する．

このようにして，$G = SO(n)$ 上の対象で $x \mapsto gxg^{-1}$ で不変なものと T 上の対象で $W(T)$ で不変なものとを自然に同一視できる．

定理 4.14. [2, p. 285, Prop. 2.2] $t_1, t_2 \in T$ に対して，$g \in G$ が存在して，$t_2 = gt_1g^{-1}$ となったとすると，$x \in N(T)$ が存在して，$t_2 = xt_1x^{-1}$．

4.3 $\mathfrak{u}(n)$ の標準形

始めに $\mathfrak{u}(2)$ の元の固有値は純虚数であることを示そう．$\mathfrak{u}(2)$ の任意の元は

$$X = \begin{pmatrix} ia & c \\ -\bar{c} & ib \end{pmatrix} \qquad (a, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{C})$$

という形である．固有多項式 $f_X(t)$ は

$$f_X(t) = |tE_2 - X| = \begin{vmatrix} t - ia & -c \\ \bar{c} & t - ib \end{vmatrix} = t^2 - i(a+b)t - ab + |c|^2$$

固有値 t は

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{2}(i(a+b) \pm \sqrt{-(a+b)^2 + 4ab - |c|^2}) \\ &= \frac{1}{2}(i(a+b) \pm \sqrt{-(a-b)^2 - |c|^2}) \\ &= \frac{i}{2}(a + b \pm \sqrt{(a-b)^2 + |c|^2} \in i\mathbb{R} \end{aligned}$$

よって，固有値は純虚数になる．次の命題の (1) はこのことの一般化である．

命題 4.15. $X \in \mathfrak{u}(n)$ とする．

(1) X の固有値は純虚数である．

(2) ia, ib を X の互いに異なる固有値とすると，これらの固有空間は直交する．

証明. (1) $\alpha \in \mathbb{C}$ を X の固有値とし，$x \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ を α に対する固有ベクトルとする．このとき，

$$\overline{\alpha}\|x\|^2 = \langle Xx, x\rangle = \langle x, X^*x\rangle = -\langle x, Xx\rangle = -\langle x, \alpha x\rangle = -\alpha\|x\|^2$$

$x \neq 0$ より $\|x\|^2 > 0$．よって，$\overline{\alpha} = -\alpha$ となり，α は純虚数である．

(2) ia, ib $(a, b \in \mathbb{R}, a \neq b)$ に対する固有空間をそれぞれ $V(ia), V(ib)$ とする．$x \in V(ia), y \in V(ib)$ に対し，

$$\begin{aligned}-ia\langle x, y\rangle &= \langle iax, y\rangle = \langle Xx, y\rangle \\ &= \langle x, X^*y\rangle = -\langle x, Xy\rangle = -\langle x, iby\rangle = -ib\langle x, y\rangle\end{aligned}$$

$a \neq b$ より，$\langle x, y\rangle = 0$． □

定理 4.16. 任意の $X \in \mathfrak{u}(n)$ に対して，$g \in U(n)$ が存在して，

$$g^*Xg = \begin{pmatrix} i\theta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & i\theta_n \end{pmatrix} \qquad (\theta_1, \cdots, \theta_n \in \mathbb{R})$$

証明. X の固有値全部を $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$ とし，固有値 α_j に対する固有空間を $V(\alpha_j)$ と表す．命題 4.20, (2) より

$$\mathbb{C}^n = V(\alpha_1) \oplus \cdots \oplus V(\alpha_m) \qquad (\text{直交直和})$$

命題 4.20, (1) より，各 α_j は純虚数である．$V(\alpha_1), \cdots, V(\alpha_m)$ の正規直交基底を並べて $\mathbb{C}^n$ の正規直交基底 $\{u_1, \cdots, u_m\}$ をつくり，$g = (u_1, \cdots, u_n)$ とおくと，$g \in U(n)$ で g^*Xg は主張の形になる． □

$\mathfrak{u}(n)$ の可換部分環 $\mathfrak{t}$ を

$$\mathfrak{t} = \left\{ \begin{pmatrix} i\theta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & i\theta_n \end{pmatrix} \middle| \theta_1, \cdots, \theta_n \in \mathbb{R} \right\}$$

と定める．

$U(n)$ の $\mathfrak{u}(n)$ への作用を

$$\mathrm{Ad}(g)X = gXg^{-1} \quad (g \in U(n), X \in \mathfrak{u}(n))$$

と定める．この作用を $U(n)$ の**随伴作用**という．

定理 4.16 より

$$\mathfrak{u}(n) = \mathrm{Ad}(U(n))\mathfrak{t}$$

命題 4.17. $j < k$ に対し，

$$F_{jk} = E_{jk} - E_{kj},\ G_{jk} = i(E_{jk} + E_{kj}) \in \mathfrak{u}(n),$$
$$H_{jk} = 2i(E_{jj} - E_{kk}) \in \mathfrak{t}$$

とおく．このとき，次が成り立つ．

(1) $\mathfrak{u}(n) = \mathfrak{t} \oplus \sum_{j<k} \mathbb{R}F_{jk} \oplus \sum_{j<k} \mathbb{R}G_{jk}$

(2) $H = \sum x_l i E_{ll} \in \mathfrak{t}$ に対し，

$$[H, F_{jk}] = (x_j - x_k)G_{jk},\ [H, G_{jk}] = -(x_j - x_k)F_{jk},$$
$$[F_{jk}, G_{jk}] = H_{jk}$$

(3) 任意の $t \in \mathbb{R}, H = \sum x_l i E_{ll} \in \mathfrak{t}$ に対し，

$$(\exp t\mathrm{ad}F_{jk})H = H + \frac{1}{4}(x_j - x_k)(\cos 2t - 1)H_{jk} - \frac{1}{2}(\sin 2t)G_{jk}$$

系 4.18. 互いに異なる実数 $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$ に対し，$H_0 = \sum x_l i E_{ll} \in \mathfrak{t}$ とおくと，

$$\mathfrak{t} = \{X \in \mathfrak{u}(n) \mid [H_0, X] = 0\}$$

証明. $\mathfrak{t}$ は可換環だから，$\subset$ が得られる．$\supset$ を示すため，$X \in \mathfrak{u}(n)$ が $[H_0, X] = 0$ を満たしたとする．命題 4.17, (1) を用いて，

$$X = H + \sum_{j<k} a_{jk}F_{jk} + \sum_{j<k} b_{jk}G_{jk} \qquad (H \in \mathfrak{t}, a_{jk}, b_{jk} \in \mathbb{R})$$

と表示する．$H_0 = \sum x_l i E_{ll}$ とおくと，命題 4.17, (2) より，

$$0 = [H_0, X] = \sum_{j<k} a_{jk}(x_j - x_k)G_{jk} - \sum_{j<k} b_{jk}(x_j - x_k)F_{jk}$$

$x_j \neq x_k$ より，$a_{jk} = b_{jk} = 0$．ゆえに，$X = H \in \mathfrak{t}$ が得られた． □

上の系の中の H_0 を $\mathfrak{u}(n)$ の**正則元**という．

系 4.19. $\mathfrak{t}$ は $\mathfrak{u}(n)$ の極大可換部分環である．

証明．$X \in \mathfrak{u}(n)$ が $[X, \mathfrak{t}] = \{0\}$ を満たしたとすると，正則元 $H_0 \in \mathfrak{t}$ に対し，$[X, H_0] = 0$．系 4.18 より，$X \in \mathfrak{t}$．この性質を用いて $\mathfrak{t}$ が極大可換部分環であることを示そう．

可換部分環 $\mathfrak{t}' \subset \mathfrak{u}(n)$ が $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{t}'$ を満たしたとする．任意の $X \in \mathfrak{t}'$ に対し，$[X, \mathfrak{t}] = \{0\}$．上の考察から，$X \in \mathfrak{t}$ となり，$\mathfrak{t} = \mathfrak{t}'$ が示された． □

問題 4.6. $\mathfrak{t}$ を $\mathfrak{u}(n)$ の任意の極大可換部分環とする．このとき，$\mathfrak{z} \subset \mathfrak{t}$ となることを示せ．ここで，$\mathfrak{z}$ は $\mathfrak{u}(n)$ の中心を表す．

4.4 $U(n)$ の標準形

命題 4.20. $g \in U(n)$ とする．

(1) $\alpha \in \mathbb{C}$ を g の固有値とすると，$|\alpha| = 1$．

(2) $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ が g の互いに異なる固有値とするとそれらの固有空間は直交する．

証明．(1) $x \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ を固有値 α に対する固有ベクトルとすると

$$\|x\|^2 = \|gx\|^2 = \|\alpha x\|^2 = |\alpha|^2 \|x\|^2$$

$x \neq 0$ より $\|x\|^2 > 0$．ゆえに，$|\alpha| = 1$．

(2) α, β に対する固有空間をそれぞれ $V(\alpha), V(\beta)$ と表し，$x \in V(\alpha), y \in V(\beta)$ とする．このとき，

$$\langle x, y\rangle = \langle gx, gy\rangle = \overline{\alpha}\beta\langle x, y\rangle$$

両辺に α を掛けると，$\alpha\langle x, y\rangle = \beta\langle x, y\rangle$．$\alpha \neq \beta$ より $\langle x, y\rangle = 0$． □

定理 4.21. 任意の $g \in U(n)$ に対して，$h \in U(n)$ が存在して，

$$h^* g h = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix} \qquad (\theta_1, \cdots, \theta_n \in \mathbb{R})$$

証明．g の固有値全部を $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$ とし，α_j に対する固有空間を $V(\alpha_j)$ と表すと，命題 4.20, (2) より

$$\mathrm{C}^n = V(\alpha_1) \oplus \cdots \oplus V(\alpha_k) \qquad (\text{直交直和})$$

命題 4.20, (1) より $|\alpha_j| = 1$ である．$V(\alpha_1), \cdots, V(\alpha_k)$ の正規直交基底を並べ $\mathbb{C}^n$ の正規直交基底 $\{u_1, \cdots, u_n\}$ をつくり，$h = (u_1, \cdots, u_n)$ とおくと，$h \in U(n)$ で，$h^* gh$ は主張の形になる． □

$U(n)$ の可換部分群 T を

$$T = \exp \mathfrak{t} = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix} \middle| \theta_1, \cdots, \theta_n \in \mathbb{R} \right\} \cong \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n \text{ 個}}$$

と定めると，T は群として $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ の n 個の直積と同型である．定理 4.21 より

$$U(n) = \bigcup_{g \in U(n)} gTg^{-1}$$

が成り立つ．

問題 4.7. $\mathfrak{u}(n)$ の上記で定めた極大可換部分環 $\mathfrak{t}$ に対し，単位格子 $\Gamma = \{H \in \mathfrak{t} \mid \exp H = e\}$ を求めよ．

系 4.22. $\exp(\mathfrak{u}(n)) = U(n)$

証明. 任意の $g \in U(n)$ に対して，$h \in U(n)$ が存在して，

$$g = h \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix} h^* \qquad (\theta_1, \cdots, \theta_n \in \mathbb{R})$$

ここで，

$$X = h \begin{pmatrix} i\theta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & i\theta_n \end{pmatrix} h^* \in \mathfrak{u}(n)$$

とおくと，$\exp X = g$． □

$GL(n, \mathbb{C})$ は位相空間 $M(n, \mathbb{C})$ の開集合である．$GL(n, \mathbb{C})$ に $M(n, \mathbb{C})$ の相対位相を入れる．例えば写像 $f : \mathbb{R} \to GL(n, \mathbb{C})$ が連続であるとは，$f(t) \in GL(n, \mathbb{C})$ の各成分が複素数値関数として連続であることを意味する．

系 4.23. $U(n)$ は $GL(n, \mathbb{C})$ の弧状連結な有界閉部分群である．

証明. $U(n)=\{g\in M(n,\mathbb{R})\mid g^*g-E_n=0\}$ であり，g^*g-E_n は g の成分の連続関数だから，$U(n)$ は $GL(n,\mathbb{C})$ の閉部分群である．$g\in U(n)$ に対し，

$$\|g\|=\sqrt{\mathrm{tr}(g^*g)}=\sqrt{n}$$

だから，$U(n)$ は $M(n,\mathbb{C})$ の有界集合である．系 4.22 より $U(n)$ は弧状連結である． □

系 4.24. $X\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ とする．任意の $t\in\mathbb{R}$ に対し，$\exp tX\in U(n)$ となるための必要十分条件は $X\in\mathfrak{u}(n)$ となることである．

証明. ($\Leftarrow$) は系 4.22 から従う．($\Rightarrow$) を示すため任意の $t\in\mathbb{R}$ に対し，$\exp tX\in U(n)$ と仮定する．このとき，

$$\exp(tX^*)=(\exp tX)^*=(\exp tX)^{-1}=\exp(-tX)$$

両辺の $t=0$ における微分係数を見比べて $X^*=-X$．ゆえに，$X\in\mathfrak{u}(n)$. □

$\mathfrak{u}(n)$ は $U(n)$ の Lie 環である．

命題 4.25. $X\in\mathfrak{u}(n)$ とする．任意の $t\in\mathbb{R}$ に対して，$\exp tX\in T$ となるための条件は $X\in\mathfrak{t}$ である．

証明. $T=\exp\mathfrak{t}$ だから，($\Leftarrow$) は明らかである．($\Rightarrow$) を示す．$\exp tX$ は t の関数として微分可能だから，微分可能な関数 $a_1(t),\cdots,a_n(t)$ で $a_j(0)=1$ となるものが存在して，

$$\exp tX=\begin{pmatrix}a_1(t)&&\\&\ddots&\\&&a_n(t)\end{pmatrix}$$

$t=0$ における微分係数を見て

$$X=\begin{pmatrix}\dot{a}_1(0)&&\\&\ddots&\\&&\dot{a}_n(0)\end{pmatrix}\in\mathfrak{u}(n)$$

よって，X は対角行列となり，$X\in\mathfrak{t}$ が得られる． □

命題 4.26. $\mathfrak{u}(n)$ の Kiliing 形式 B について，

$$B(X,Y) = 2(n\mathrm{tr}(XY) - \mathrm{tr}(X)\mathrm{tr}(Y)) \quad (X, Y \in \mathfrak{u}(n))$$

が成り立つ．さらに任意の $X \in \mathfrak{u}(n)$ について，

$$\begin{aligned} B(X,X) &\le 0 \\ &= \Leftrightarrow X \in \mathfrak{z}(\mathfrak{u}(n)) \end{aligned}$$

証明. 命題 4.17, (2) より $H = \sum x_l i E_{ll} \in \mathfrak{t}$ に対し，

$$\begin{aligned} &(\mathrm{ad}H)^2(\mathfrak{t}) = \{0\}, \\ &(\mathrm{ad}H)^2 F_{jk} = -(x_j - x_k)^2 F_{jk}, \quad (\mathrm{ad}H)^2 G_{jk} = -(x_j - x_k)^2 G_{jk} \end{aligned}$$

命題 4.17, (1) より

$$\begin{aligned} B(H,H) = -2\sum_{j<k}(x_j - x_k)^2 &\le 0 \\ &= 0 \Leftrightarrow x_1 = \cdots = x_n \\ &\quad \Leftrightarrow H \in \mathfrak{z}(\mathfrak{u}(n)) = \mathbb{R}\sqrt{-1}E_n \end{aligned}$$

$H^2 = -\sum x_l^2 E_{ll}$ より，$\mathrm{tr}(H^2) = -\sum x_l^2$ となることに注意する．

$$\begin{aligned} B(H,H) &= -2\sum_{1\le j<k\le n}(x_j^2 + x_k^2 - 2x_jx_k) \\ &= -2\{\sum_{j=1}^{n}(n-j)x_j^2 + \sum_{k=1}^{n}(k-1)x_k^2 - 2\sum_{1\le j<k\le n}x_jx_k\} \\ &= -2\{(n-1)\sum_{j=1}^{n}x_j^2 - (\sum_{j,k}x_jx_k - \sum_j x_j^2)\} \\ &= 2(n\mathrm{tr}(H^2) - (\mathrm{tr}H)^2) \end{aligned}$$

定理 4.16 より，任意の $X \in \mathfrak{u}(n)$ に対し，$g \in U(n)$ と $H \in \mathfrak{t}$ が存在して，$X = \mathrm{Ad}(g)H$．このとき，

$$\begin{aligned} B(X,X) &= B(\mathrm{Ad}(g)H, \mathrm{Ad}(g)H) = B(H,H) \\ &\le 0 \\ &= 0 \Leftrightarrow X \in \mathfrak{z}(\mathfrak{u}(n)) \end{aligned}$$

さらに，

$$
\begin{aligned}
B(X,X) = B(H,H) &= 2(n\mathrm{tr}(H^2) - (\mathrm{tr}H)^2) \\
&= 2(n\mathrm{tr}((\mathrm{Ad}(g)H)^2) - (\mathrm{tr}(\mathrm{Ad}(g)H))^2) \\
&= 2(n\mathrm{tr}(X^2) - (\mathrm{tr}X)^2)
\end{aligned}
$$

B は対称だから

$$
\begin{aligned}
B(X,Y) &= \frac{1}{2}(B(X+Y,X+Y) - B(X,X) - B(Y,Y)) \\
&= 2(n\mathrm{tr}(XY) - (\mathrm{tr}X)(\mathrm{tr}Y))
\end{aligned}
$$

□

$U(n)$ の部分群 $N(\mathfrak{t}), N(T)$ をそれぞれ

$$
N(\mathfrak{t}) = \{g \in U(n) \mid \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{t} = \mathfrak{t}\}, \quad N(T) = \{g \in U(n) \mid gTg^{-1} = T\}
$$

と定める．$N(\mathfrak{t}), N(T)$ それぞれの正規部分群 $Z(\mathfrak{t}), Z(T)$ を

$$
\begin{aligned}
Z(\mathfrak{t}) &= \{g \in U(n) \mid \mathrm{Ad}(g)H = H \quad (H \in \mathfrak{t})\}, \\
Z(T) &= \{g \in U(n) \mid gt = tg \quad (t \in T)\}
\end{aligned}
$$

と定める．

命題 4.27. $N(\mathfrak{t}) = N(T),\ Z(\mathfrak{t}) = Z(T) = T$ が成り立つ．

証明．命題 4.12 の証明と同様にして，$N(\mathfrak{t}) = N(T),\ Z(\mathfrak{t}) = Z(T) \supset T$ が得られる．$g = (g_{ij}) \in Z(T)$ とすると，任意の $t = (t_i\delta_{ij}) \in T$ に対し，$gt = tg$．成分表示すると $g_{ij}t_j = g_{ij}t_i$．$i \neq j$ のとき $t_i \neq t_j$ となるように t をとると $i \neq j$ のとき $g_{ij} = 0$ が得られる．よって，$g \in T$．ゆえに，$Z(T) = T$． □

商群 $W(T) = N(T)/Z(T) = N(T)/T$ を $U(n)$ の T に関する **Weyl 群**という．Weyl 群 $W(T)$ は定義から T や $\mathfrak{t}$ に忠実に作用する．この作用を具体的に記述しよう．$\mathfrak{t}$ や T の元は対角行列で $W(T)$ の作用により固有値は変わらないから，$W(T)$ の作用は対角成分の置換を引き起こす．よって，$\{1, \cdots, n\}$ の置換全体のなす n 次対称群を S_n と表すと，$W(T) \subset S_n$．

命題 4.28. $W(T)$ の $\mathfrak{t}$ への作用は対角成分の置換群に一致する：
$W(T) = S_n$．

証明.　命題 4.16, (4) で $\cos 2t = -1$ と t をとると，

$$(\exp t\mathrm{ad}F_{jk})H = x_k iE_{jj} + x_j iE_{kk} + \sum_{l \neq j,k} x_l iE_{ll}$$

ゆえに，j と k の互換は $W(T)$ の元になる．任意の置換は互換の積で表されるから，$W(T) = S_n$． □

4.5　$\mathfrak{su}(n)$ の標準形

$n = 2$ のとき，$\mathfrak{su}(2)$ の任意の元 X は

$$X = \begin{pmatrix} ia & b \\ -\bar{b} & -ia \end{pmatrix} \qquad (a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{C})$$

と表示される．固有多項式は

$$f_X(t) = |tE_2 - X| = \begin{vmatrix} t - ia & -b \\ \bar{b} & t + ia \end{vmatrix} = t^2 + (a^2 + |b|^2)$$

固有値は $\pm\sqrt{a^2 + |b|^2}i$ であり，対応する固有空間は，

$$V(\sqrt{a^2 + |b|^2}i) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} b \\ i(\sqrt{a^2 + |b|^2} - a) \end{pmatrix},$$
$$V(-\sqrt{a^2 + |b|^2}i) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} b \\ -i(\sqrt{a^2 + |b|^2} + a) \end{pmatrix}$$

よって

$$\mathbb{C}^2 = V(\sqrt{a^2 + |b|^2}i) \oplus V(-\sqrt{a^2 + |b|^2}i) \qquad (\text{直交直和})$$

$\mathfrak{su}(n)$ の可換部分環 $\mathfrak{t}$ を

$$\mathfrak{t} = \left\{ \begin{pmatrix} i\theta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & i\theta_n \end{pmatrix} \middle| \theta_1, \cdots, \theta_n \in \mathbb{R}, \sum_{j=1}^{n} \theta_j = 0 \right\}$$

と定める．命題 4.17 より次が得られる．

命題 4.29. $j<k$ に対し，

$$F_{jk} = E_{jk} - E_{kj}, \quad G_{jk} = i(E_{jk} + E_{kj}) \in \mathfrak{su}(n),$$
$$H_{jk} = 2i(E_{jj} - E_{kk}) \in \mathfrak{t}$$

とおく．このとき，次が成り立つ．

(1) $\mathfrak{su}(n) = \mathfrak{t} \oplus \sum_{j<k} \mathbb{R}F_{jk} \oplus \sum_{j<k} \mathbb{R}G_{jk}$

(2) $H = \sum x_l iE_{ll} \in \mathfrak{t}$ に対し，

$$[H, F_{jk}] = (x_j - x_k)G_{jk}, \quad [H, G_{jk}] = -(x_j - x_k)F_{jk},$$
$$[F_{jk}, G_{jk}] = H_{jk}$$

(3) 任意の $t \in \mathbb{R}, H = \sum x_l iE_{ll} \in \mathfrak{t}$ に対し，

$$(\exp t\mathrm{ad}F_{jk})H = H + \frac{1}{4}(x_j - x_k)(\cos 2t - 1)H_{jk} - \frac{1}{2}(\sin 2t)G_{jk}$$

系 4.18 の証明と同様にして次が得られる．

系 4.30. 互いに異なる実数 $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$ で $\sum x_l = 0$ を満たすものに対し，$H_0 = \sum x_l iE_{ll} \in \mathfrak{t}$ とおくと，

$$\mathfrak{t} = \{X \in \mathfrak{su}(n) \mid [X, H_0] = 0\}$$

上の系の中の H_0 を $\mathfrak{su}(n)$ の**正則元**という．系 4.19 の証明と同様にして次が得られる．

系 4.31. $\mathfrak{t}$ は $\mathfrak{su}(n)$ の極大可換部分環である．

4.6 $SU(n)$ の標準形

$SU(n) = \{T \in U(n) \mid \det(T) = 1\}$ とおく．$SU(n)$ は線形 Lie 群である．これを**特殊ユニタリー群**という．

問題 4.8. 次を示せ．

(1) $SU(n)$ は行列の積に関して群になる．

(2)

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} z & -\overline{w} \\ w & \overline{z} \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} z, w \in \mathbb{C}, \\ |z|^2 + |w|^2 = 1 \end{array} \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} z & -\overline{w} \\ w & \overline{z} \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} z = \cos\theta_1 + i\cos\theta_2\sin\theta_1, \\ w = \cos\theta_3\sin\theta_2\sin\theta_1 + i\sin\theta_3\sin\theta_2\sin\theta_1, \\ 0 \le \theta_1 \le \pi, 0 \le \theta_2 \le \pi, \\ 0 \le \theta_3 \le 2\pi \end{array} \right\}$$

定理 4.32. 任意の $g \in SU(n)$ に対して，$h \in SU(n)$ が存在して，

$$h^* g h = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix} \qquad (\theta_1, \cdots, \theta_n \in \mathbb{R}, \sum_{j=1}^{n} \theta_j = 0)$$

証明. $g \in SU(n) \subset U(n)$ だから，$h_1 \in U(n)$ と $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$ が存在して，

$$h_1^* g h_1 = \begin{pmatrix} e^{ix_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{ix_n} \end{pmatrix} \in SU(n)$$

$\alpha \in \mathbb{C}, |\alpha| = 1$ が存在して，$h := \alpha h_1 \in SU(n)$．$\sum x_j \in 2\pi\mathbb{Z}$ だから，$m \in \mathbb{Z}$ が存在して，$\sum x_j = 2\pi m$．$\theta_j = x_j \ (1 \le j \le n-1), \theta_n = x_n - 2\pi m$ とおくと，$\sum \theta_j = \sum x_j - 2\pi m = 0$．ここで，

$$X = \begin{pmatrix} i\theta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \theta_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{su}(n)$$

とおくと，

$$h^* g h = \overline{\alpha} h_1^* g \alpha h_1 = |\alpha|^2 h_1^* g h_1 = h_1^* g h_1 = \exp X$$

□

$SU(n)$ の可換部分群 T を

$$T = \exp \mathfrak{t} = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_n \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} t_j \in \mathbb{C}, |t_j| = 1, \\ t_1 \cdots t_n = 1 \end{array} \right\} \cong \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n-1\text{ 個}}$$

と定めると，T は群として S^1 の $n-1$ 個の直積と同型である．定理より

$$SU(n) = \bigcup_{g \in SU(n)} gTg^{-1}$$

が成り立つ．

問題 4.9. $\mathfrak{su}(n)$ の上記で定めた極大可換部分環 $\mathfrak{t}$ に対し，単位格子 $\Gamma = \{H \in \mathfrak{t} \mid \exp H = e\}$ を求めよ．

系 4.33. $\exp(\mathfrak{su}(n)) = SU(n)$

証明. 任意の $g \in SU(n)$ に対して，$h \in SU(n)$ が存在して，

$$g = h \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix} h^* \qquad (\theta_1, \cdots, \theta_n \in \mathbb{R}, \sum_{j=1}^{n} \theta_j = 0)$$

ここで，

$$X = h \begin{pmatrix} i\theta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & i\theta_n \end{pmatrix} h^* \in \mathfrak{su}(n)$$

とおくと，$\exp X = g$． □

系 4.34. $SU(n)$ は $GL(n, \mathbb{C})$ の弧状連結な有界閉部分群である．

系 4.35. $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ とする．任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し，$\exp tX \in SU(n)$ となるための必要十分条件は $X \in \mathfrak{su}(n)$ となることである．

証明. $(\Leftarrow)$ は系 4.33 から従う．$(\Rightarrow)$ を示すため任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し，$\exp tX \in SU(n)$ と仮定する．$SU(n) \subset U(n)$ だから，系 4.24 より，$X \in \mathfrak{u}(n)$．また，

$$1 = |\exp tx| = e^{t\mathrm{tr}(X)}$$

よって，$\mathrm{tr}(X) = 0$ となり，$X \in \mathfrak{su}(n)$ が得られた． □

$\mathfrak{su}(n)$ は $SU(n)$ の Lie 環である．

命題 4.36. $X \in \mathfrak{su}(n)$ とする．任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して，$\exp tX \in T$ となるための条件は $X \in \mathfrak{t}$ である．

証明．$T = \exp \mathfrak{t}$ だから，$(\Leftarrow)$ は明らかである．$(\Rightarrow)$ を示す．$\exp tX$ は t の関数として微分可能だから，微分可能な関数 $a_1(t), \cdots, a_n(t)$ で $a_j(0) = 1$ となるものが存在して，

$$\exp tX = \begin{pmatrix} a_1(t) & & \\ & \ddots & \\ & & a_n(t) \end{pmatrix}, \quad a_1(t) \cdots a_n(t) = 1$$

上二式の $t = 0$ における微分係数を見て

$$X = \begin{pmatrix} \dot{a}_1(0) & & \\ & \ddots & \\ & & \dot{a}_n(0) \end{pmatrix} \in \mathfrak{u}(n), \quad \mathrm{tr}(X) = 0$$

よって，X は対角行列となり，$X \in \mathfrak{t}$ が得られる． □

命題 4.37. $n \geq 2$ のとき，$\mathfrak{su}(n)$ の Killing 形式 B について，

$$B(X, Y) = 2n\mathrm{tr}(XY) \qquad (X, Y \in \mathfrak{su}(n))$$

特に，$n \geq 2$ のとき，B は負定値であり，$\mathfrak{su}(n)$ は compact 半単純 Lie 環である．[8]

証明．$\mathfrak{su}(n)$ は $\mathfrak{u}(n)$ のイデアルだから，$\mathfrak{su}(n)$ の Killing 形式 B は $\mathfrak{u}(n)$ の Killing 形式の $\mathfrak{su}(n)$ への制限に一致する．命題 4.26 より，$B(X, Y) = 2n\mathrm{tr}(XY)$ が得られる．$n \geq 2$ のとき，再度，命題 4.26 を用いて，

$$\begin{aligned} B(X, X) &\leq 0 \\ &\Leftrightarrow X \in \mathfrak{z}(\mathfrak{u}(n)) \cap \mathfrak{su}(n) = \{0\} \\ &\Leftrightarrow X = 0 \end{aligned}$$

□

系 4.38. $\mathfrak{u}(n)$ は compact Lie 環である．

証明．$\mathfrak{u}(n) = \mathfrak{su}(n) \oplus \mathbb{R}\sqrt{-1}1$(イデアルの直和) であり，$\mathfrak{su}(n)$ は compact だから主張が従う． □

[8]実はより強く，$n \geq 2$ のとき，$\mathfrak{su}(n)$ は compact「単純」Lie 環である．

$SU(n)$ の部分群 $N(\mathfrak{t}), N(T)$ をそれぞれ

$$N(\mathfrak{t}) = \{g \in SU(n) \mid \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{t} = \mathfrak{t}\}, \quad N(T) = \{g \in SU(n) \mid gTg^{-1} = T\}$$

と定める．$N(\mathfrak{t}), N(T)$ それぞれの正規部分群 $Z(\mathfrak{t}), Z(T)$ を

$$\begin{aligned} Z(\mathfrak{t}) &= \{g \in SU(n) \mid \mathrm{Ad}(g)H = H \quad (H \in \mathfrak{t})\}, \\ Z(T) &= \{g \in SU(n) \mid gt = tg \quad (t \in T)\} \end{aligned}$$

と定める．

命題 4.39. $N(\mathfrak{t}) = N(T),\ Z(\mathfrak{t}) = Z(T) = T$ が成り立つ．

証明. 命題 4.12 の証明と同様にして，$N(\mathfrak{t}) = N(T),\ Z(\mathfrak{t}) = Z(T) \supset T$ が得られる．$g = (g_{ij}) \in Z(T)$ とすると，任意の $t = (t_i\delta_{ij}) \in T$ に対し，$gt = tg$．成分表示すると $g_{ij}t_j = g_{ij}t_i$．$i \neq j$ のとき $t_i \neq t_j$ となるように t をとると $i \neq j$ のとき $g_{ij} = 0$ が得られる．よって，$g \in T$．ゆえに，$Z(T) = T$．$g = (g_{ij}) \in Z(T)$ とすると，任意の $t = (t_i\delta_{ij}) \in T$ に対し，$gt = tg$．成分表示すると $g_{ij}t_j = g_{ij}t_i$．$i \neq j$ のとき $t_i \neq t_j$ となるように t をとると $i \neq j$ のとき $g_{ij} = 0$ が得られる．よって，$g \in T$．ゆえに，$Z(T) = T$． □

商群 $W(T) = N(T)/Z(T) = N(T)/T$ を $SU(n)$ の T に関する **Weyl 群**という．Weyl 群 $W(T)$ は定義から T や $\mathfrak{t}$ に忠実に作用する．この作用を具体的に記述しよう．$\mathfrak{t}$ や T の元は対角行列で $W(T)$ の作用により固有値は変わらないから，$W(T)$ の作用は対角成分の置換を引き起こす．よって，$\{1, \cdots, n\}$ の置換全体のなす n 次対称群を S_n と表すと，$W(T) \subset S_n$．

命題 4.40. $W(T)$ の $\mathfrak{t}$ への作用は対角成分の置換群に一致する：
$W(T) = S_n$.

証明. 命題 4.29, (4) で $\cos 2t = -1$ と t をとり，$H = i(E_{jj} - E_{kk})$ とおくと，

$$(\exp t\mathrm{ad}F_{jk})i(E_{jj} - E_{kk}) = i(E_{kk} - E_{jj})$$

$H = \sum_{l \neq j,k} ix_lE_{ll}$ とおくと，$(\exp t\mathrm{ad}F_{jk})H = H$．そこで，$\sigma \in S_n$ に対し，S_n を $\mathfrak{t}$ に

$$\sigma(\sum_l ix_lE_{ll}) = \sum_l ix_lE_{\sigma(l),\sigma(l)}$$

によって作用させると $S_n \subset W(T)$ となる．逆の包含は既に示したから，$W(T) = S_n$． □

5 等質空間

X を集合とする．X から X への全単射全体のなす群を $S(X)$ と表し，X 上の**対称群**という．$\sigma \in S(X)$ と $x \in X$ に対し，$\sigma(x) \in X$ が定まる．これを $S(X)$ の X への作用と言う．この講義では，ベクトル空間や内積をもつベクトル空間，あるいはこれらから派生してくる空間を X として考えたい．すると，X は和やスカラー倍，内積といった様々な構造をもつので，これらを保つ $S(X)$ の部分群の作用を考えることは自然なことになる．たとえばベクトル空間の和とスカラー倍を保つ作用は線形変換に他ならない．$\tilde{G}$ を $S(X)$ の部分群とすると，$\tilde{G}$ の X への作用が，$g \in \tilde{G}$ と $x \in X$ に対し，$g(x) \in X$ で定まる．ほとんど同じことであるが，群 G と準同型写像 $\rho : G \to S(X)$ があれば，G の X への**作用**が $g \in G$ と $x \in X$ に対し，$\rho(g)x \in X$ で定まる．記号 ρ は前後関係から明らかな場合には省くこともある．このとき，$x \in X$ に対し，

$$Gx = \{gx \mid g \in G\} \subset X$$

を x を通る G-**軌道**または単に x を通る**軌道**と言う．$x, y \in X$ に対し，$Gx = Gy$ となる必要十分条件は，$g \in G$ が存在して，$gx = y$ となることである．

$x \in X$ に対し，x における**イソトロピー部分群** G_x を

$$G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$$

と定める．G_x は G の部分群である．

群 G の集合 X への作用が**推移的**であるとは，任意の $x, y \in X$ に対し，ある $g \in G$ が存在して，$y = gx$ となるときをいう．このとき，X を G-**等質空間**または単に**等質空間**という．G-等質空間の軌道空間は 1 点からなる．

X が G-等質空間のとき，任意の $x \in X$ に対し，

$$G/G_x \leftrightarrow X; gG_x \leftrightarrow gx$$

は well-defined で全単射となる．

5.1 Euclid 空間

n 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ に $GL(n,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$ を次のように作用させる．

$$(g, y)x = gx + y \quad (g \in GL(n,\mathbb{R}), x, y \in \mathbb{R}^n)$$

このとき，

$$(g_1, y_1)((g_2, y_2)x) = (g_1, y_1)(g_2 x + y_2) = (g_1 g_2, g_1 y_2 + y_1)x$$

このことを踏まえて，集合としての直積 $GL(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$ に群演算を

$$(g_1, y_1)(g_2, y_2) = (g_1 g_2, g_1 y_2 + y_1)$$

で定義したものを，$GL(n, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$ と表し，$GL(n, \mathbb{R})$ と $\mathbb{R}^n$ との**半直積**という．$GL(n, \mathbb{R})$ と $\mathbb{R}^n$ の部分群 $\{E_n\} \times \mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^n$ に平行移動として作用する．この作用は推移的である．よって，G を $GL(n, \mathbb{R})$ の部分群とすると，$G \ltimes \mathbb{R}^n$ も $\mathbb{R}^n$ に推移的に作用する．原点 O におけるイソトロピー部分群は

$$(G \ltimes \mathbb{R}^n)_O = \{(g, 0) \mid g \in G\} = G$$

よって，$\mathbb{R}^n$ の等質空間としての表示

$$\mathbb{R}^n = (G \ltimes \mathbb{R}^n)/G$$

が得られる．二点 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ の距離を $d(x_1, x_2)$ と表す：

$$d(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\|$$

問題 5.1. $(g, y) \in O(n) \ltimes \mathbb{R}^n, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ に対し，

$$d((g, y)x_1, (g, y)x_2) = d(x_1, x_2)$$

が成り立つことを示せ．

$GL(n, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$ の部分群 $O(n) \ltimes \mathbb{R}^n$ を **Euclid 運動群**という．

問題 5.2. $x \in \mathbb{R}^n$ に対し，$\mathbb{R}^n$ の変換 s_x を

$$s_x(y) = 2x - y$$

と定め，$\mathbb{R}^n$ の点 x における**点対称**という．

$$F(s_x, \mathbb{R}^n) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid s_x(y) = y\}$$

とおくとき，次を示せ．

(1) $F(s_x, \mathbb{R}^n) = \{x\}$.

(2) $s_x^2 = 1$.

(3) $y, z \in \mathbb{R}^n$ に対し，$d(s_x y, s_x z) = d(y, z)$.

(4) $u \in \mathbb{R}^n$ に対し，$\frac{d}{dt} s_x(x + tu)_{|t=0} = -u$.

5.2 球面

$O(n), SO(n)$ はそれぞれ $n-1$ 次元球面 S^{n-1} に推移的に作用する．$e_n = {}^t(0,\cdots,0,1)$ におけるイソトロピー部分群はそれぞれ

$$O(n)_{e_n} = O(n-1), \quad SO(n)_{e_n} = SO(n-1)$$

ゆえに S^{n-1} の等質空間としての表示

$$S^{n-1} = O(n)/O(n-1) = SO(n)/SO(n-1)$$

が得られる．

$U(n), SU(n)$ は $2n-1$ 次元球面 $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ に推移的に作用する．それぞれの $e_n \in \mathbb{C}^n$ におけるイソトロピー部分群は

$$U(n)_{e_n} = \left\{ \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, g \in U(n-1) \right\} \cong U(n-1),$$
$$SU(n)_{e_n} = \left\{ \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, g \in SU(n-1) \right\} \cong SU(n-1)$$

ゆえに S^{2n-1} の等質空間としての表示

$$S^{2n-1} = U(n)/U(n-1) = SU(n)/SU(n-1)$$

が得られる．

問題 5.3. $x \in S^{n-1}(\subset \mathbb{R}^n)$ に対し，$\mathbb{R}^n$ の変換 s_x を

$$s_x(y) = -y + 2\langle y, x\rangle x$$

と定め，S^{n-1} の x における**点対称**という．

$$F(s_x, S^{n-1}) = \{y \in S^{n-1} \mid s_x(y) = y\}$$

とおくとき，次を示せ．

(1) $s_x \in O(n), s_x^2 = 1$

(2) $s_x(S^{n-1}) = S^{n-1}$

(3) $F(s_x, S^{n-1}) = \{x, -x\}$

5.3　Grassmann 多様体

$\mathbb{R}^n$ の k 次元部分空間全体のなす集合を**実 Grassmann 多様体**といい，$G_k(\mathbb{R}^n)$ と表す．$GL(n,\mathbb{R})$ の $\mathbb{R}^n$ への標準的な作用は $GL(n,\mathbb{R})$ の $G_k(\mathbb{R}^n)$ への作用を誘導する：

$$gV = \{gv \mid v \in V\} \quad (V \in G_k(\mathbb{R}^n), g \in G)$$

$SO(n), O(n)$ は $GL(n,\mathbb{R})$ の部分群だから，これらも $G_k(\mathbb{R}^n)$ に作用する．$SO(n)$ の $G_k(\mathbb{R}^n)$ への作用は推移的だから，$O(n), GL(n,\mathbb{R})$ の $G_k(\mathbb{R}^n)$ への作用も推移的になる．それぞれの $\mathbb{R}^k \in G_k(\mathbb{R}^n)$ におけるイソトロピー部分群は

$$\begin{aligned}
B &:= GL(n,\mathbb{R})_{\mathbb{R}^k} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ O & g_{22} \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} g_{11} \in GL(k,\mathbb{R}), g_{22} \in GL(n-k,\mathbb{R}), \\ g_{12} \in M(k, n-k; \mathbb{R}) \end{array} \right\}, \\
O(n)_{\mathbb{R}^k} &= B \cap O(n) = O(k) \times O(n-k), \\
SO(n)_{\mathbb{R}^k} &= O(n)_{\mathbb{R}^k} \cap SO(n) = S(O(k) \times O(n-k))
\end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned}
O(k) \times O(n-k) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & O \\ O & b \end{pmatrix} \middle| a \in O(k), b \in O(n-k) \right\}, \\
S(O(k) \times O(n-k)) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & O \\ O & b \end{pmatrix} \in O(k) \times O(n-k) \middle| |a||b| = 1 \right\}
\end{aligned}$$

よって，$G_k(\mathbb{R}^n)$ の等質空間としての表示

$$\begin{aligned}
G_k(\mathbb{R}^n) &= GL(n,\mathbb{R})/B \\
&= O(n)/(O(k) \times O(n-k)) \\
&= SO(n)/S(O(k) \times O(n-k))
\end{aligned}$$

が得られる．特に，$G_1(\mathbb{R}^n)$ を**実射影空間** (real projective space) といい，$P^{n-1}(\mathbb{R}) = G_1(\mathbb{R}^n)$ と表す．

問題 5.4. $S^{n-1} \to P^{n-1}(\mathbb{R}); u \mapsto \mathbb{R}u$ は $2:1$ の全射になることを示せ．

$\mathbb{C}^n$ の k 次元複素部分空間全体のなす集合を**複素 Grassmann 多様体**といい，$G_k(\mathbb{C}^n)$ と表す．$GL(n,\mathbb{C})$ の $\mathbb{C}^n$ への標準的な作用は $GL(n,\mathbb{C})$ の $G_k(\mathbb{C}^n)$ への作用を誘導する．$SU(n), U(n)$ は $GL(n,\mathbb{C})$ の部分群だから，これらも $G_k(\mathbb{C}^n)$ に作用する．$SU(n)$ の $G_k(\mathbb{C}^n)$ への作用は推移的だから，$U(n), GL(n,\mathbb{C})$ の $G_k(\mathbb{C}^n)$ への作用も推移的になる．それぞれの $\mathbb{C}^k \in G_k(\mathbb{C}^n)$ におけるイソトロピー部分群は

$$\begin{aligned}
B &:= GL(n,\mathbb{C})_{\mathbb{C}^k} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ O & g_{22} \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} g_{11} \in GL(k,\mathbb{C}), g_{22} \in GL(n-k,\mathbb{C}), \\ g_{12} \in M(k, n-k;\mathbb{C}) \end{array} \right\}, \\
U(n)_{\mathbb{C}^k} &= B \cap U(n) = U(k) \times O(n-k), \\
SU(n)_{\mathbb{C}^k} &= U(n)_{\mathbb{C}^k} \cap SU(n) = S(U(k) \times U(n-k))
\end{aligned}$$

よって，$G_k(\mathbb{C}^n)$ の等質空間としての表示

$$\begin{aligned}
G_k(\mathbb{C}^n) &= GL(n,\mathbb{C})/B \\
&= U(n)/(U(k) \times U(n-k)) \\
&= SU(n)/S(U(k) \times U(n-k))
\end{aligned}$$

が得られる．特に，$G_1(\mathbb{C}^n)$ を**複素射影空間** (complex projective space) といい，$P^{n-1}(\mathbb{C}) = G_1(\mathbb{C}^n)$ と表す．

$\mathbb{R}^n$ の向きをもつ $k(\geq 1)$ 次元部分空間全体のなす集合を $\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ と表す．k 次元部分空間 $V \subset \mathbb{R}^n$ の順序基底 $\{v_1, \cdots, v_k\}$ の定める向きを $[\{v_1, \cdots, v_k\}]$ と表すと，

$$\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n) = \{(V, [\{\pm v_1, v_2, \cdots, v_k\}]) \mid V \in G_k(\mathbb{R}^n)\}$$

$GL(n,\mathbb{R})$ は $\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ に自然に作用する：

$$g(V, [\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}]) = (gV, [\{gv_1, gv_2, \cdots, gv_k\}]) \quad (g \in GL(n,\mathbb{R}))$$

$k = n$ のとき，$\tilde{G}_n(\mathbb{R}^n) = \{(\mathbb{R}^n, [\{\pm e_1, e_2, \cdots, e_n\}])$ (二点集合) であり，$SO(n)(\subset GL(n,\mathbb{R}))$ は推移的に作用しないが，$O(n)$ は推移的に作用する．$(\mathbb{R}^n, [\{e_1, \cdots, e_n\}])$ におけるイソトロピー部分群は

$$\begin{aligned}
&GL(n,\mathbb{R})_{(\mathbb{R}^n, [\{e_1, \cdots, e_n\}])} = GL^+(n,\mathbb{R}) = \{g \in GL(n,\mathbb{R}) \mid |g| > 0\}, \\
&O(n)_{(\mathbb{R}^n, [\{e_1, \cdots, e_n\}])} = GL^+(n,\mathbb{R}) \cap O(n) = SO(n)
\end{aligned}$$

よって，$\tilde{G}_n(\mathbb{R}^n)$ の等質空間による表示

$$\tilde{G}_n(\mathbb{R}^n) = GL(n,\mathbb{R})/GL^+(n,\mathbb{R}) = O(n)/SO(n)$$

が得られる．$1 \leq k \leq n-1$ のとき，$SO(n)$ は $\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ に推移的に作用する．$(\mathbb{R}^n, [\{e_1, \cdots, e_n\}])$ におけるイソトロピー部分群は

$$\begin{aligned}
&B = GL(n,\mathbb{R})_{(\mathbb{R}^n,[\{e_1,\cdots,e_n\}])} = \left\{ \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ O & g_{22} \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} g_{11} \in GL^+(k,\mathbb{R}), \\ g_{22} \in GL(n-k,\mathbb{R}), \\ g_{12} \in M(k,n-k;\mathbb{R}) \end{array} \right\}, \\
&O(n)_{(\mathbb{R}^n,[\{e_1,\cdots,e_n\}])} = SO(k) \times O(n-k), \\
&SO(n)_{(\mathbb{R}^n,[\{e_1,\cdots,e_n\}])} = SO(k) \times SO(n-k)
\end{aligned}$$

よって，$\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leq k \leq n-1)$ の等質空間による表示

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n) &= GL(n,\mathbb{R})/B \\
&= O(n)/(SO(k) \times O(n-k)) \\
&= SO(n)/(SO(k) \times SO(n-k))
\end{aligned}$$

が得られる．

問題 5.5. $\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ の元の向きを忘れる写像

$$\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n) \to G_k(\mathbb{R}^n); (V, [\{v_1, \cdots, v_k\}]) \mapsto V$$

は $2:1$ の全射になることを示せ．

5.4 旗多様体

$\mathbb{R}^n$ の部分空間の列 $V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_k = \mathbb{R}^n$ に対し，$d_j := \dim V_j$ とおく．組 $(V_1, \cdots, V_k)$ が**実旗** (flag) であるとは，$0 < d_1 < \cdots < d_k (= n)$ となるときを言う．[9]このとき，組 $(d_1, \cdots, d_k)$ を実旗 $(V_1, \cdots, V_k)$ の**符号** (signature) という．符号 $(d_1, \cdots, d_k)$ の実旗の全体 $F_{(d_1,\cdots,d_k)}(\mathbb{R})$ を**実旗多様体** (real flag manifold) という．特に，$(d_1, \cdots, d_k) = (1, \cdots, n)$ のとき，

[9]「旗」という感じがするでしょうか？$\mathbb{R}^2$ の旗 $(V_1, V_2), \dim V_j = j$ は V_1 が旗についている棒で，V_2 が旗本体のイメージである．

$F_{(1,\cdots,n)}(\mathbb{R})$ を**充満実旗多様体** (full real flag manifold) という．$GL(n,\mathbb{R})$ は $F_{(d_1,\cdots,d_k)}(\mathbb{R})$ に

$$\begin{aligned}&g(V_1,\cdots,V_k)=(gV_1,\cdots,gV_k)\\&\text{ただし，}\quad g\in GL(n,\mathbb{R}),(V_1,\cdots,V_k)\in F_{(d_1,\cdots,d_k)}(\mathbb{R})\end{aligned}$$

によって作用する．この作用が推移的であることを示そう．そのために，$(V_1,\cdots,V_k)\in F_{(d_1,\cdots,d_k)}(\mathbb{R})$ とする．$\mathbb{R}^n$ に標準内積を入れ，V_1 の「正規直交基底」を拡張し V_2 の「正規直交基底」をつくり，$\cdots$，V_{k-1} の「正規直交基底」を拡張し $V_k=\mathbb{R}^n$ の「正規直交基底」$\{u_1,\cdots,u_n\}$ をつくる．このとき，$g=(u_1,\cdots,u_n)$ とおくと，$g\in O(n)$ であり，自然な包含 $\mathbb{R}^{d_1}\subset\cdots\subset\mathbb{R}^{d_k}$ に対し，$g\mathbb{R}^{d_i}=V_i$ となるから，$F_{(d_1,\cdots,d_k)}(\mathbb{R})$ は $O(n)$-等質空間である．必要があれば，$g=(u_1,\cdots,u_n)$ を $g=(-u_1,u_2,\cdots,u_n)$ に取り換えることにより．$F_{(d_1,\cdots,d_k)}(\mathbb{R})$ は $SO(n)$-等質空間であることもわかる．特に，$F_{(d_1,\cdots,d_k)}(\mathbb{R})$ は $GL(n,\mathbb{R})$-等質空間でもある（これを直接示すには上の「正規直交基底」の部分を「基底」に置き換えればよい）．イソトロピー部分群は

$$\begin{aligned}&B:=GL(n,\mathbb{R})_{(\mathbb{R}^{d_1},\cdots,\mathbb{R}^{d_k})}\\&=\left\{\begin{pmatrix}x_{11}&*&*&*\\&x_{22}&*&*\\&&\ddots&*\\&&&x_{kk}\end{pmatrix}\in GL(n,\mathbb{R})\,\middle|\,x_{ii}\in M(d_i-d_{i-1},\mathbb{R})\right\},\\&O(n)_{(\mathbb{R}^{d_1},\cdots,\mathbb{R}^{d_k})}=B\cap O(n)=O(d_1)\times O(d_2-d_1)\times\cdots\times O(d_k-d_{k-1}),\\&SO(n)_{(\mathbb{R}^{d_1},\cdots,\mathbb{R}^{d_k})}=S(O(d_1)\times O(d_2-d_1)\times\cdots\times O(d_k-d_{k-1}))\end{aligned}$$

よって，$F_{(d_1,\cdots,d_k)}(\mathbb{R})$ の等質空間としての表示

$$\begin{aligned}F_{(d_1,\cdots,d_k)}(\mathbb{R})&=GL(n,\mathbb{R})/B\\&=O(n)/(O(d_1)\times O(d_2-d_1)\times\cdots\times O(d_k-d_{k-1}))\\&=SO(n)/S(O(d_1)\times O(d_2-d_1)\times\cdots\times O(d_k-d_{k-1}))\end{aligned}$$

が得られる．

$\mathbb{C}^n$ の複素部分空間の列 $V_1\subset V_2\subset\cdots\subset V_n=\mathbb{C}^n$ の組 $(V_1,\cdots,V_n)$ に対し，$d_j=\dim_{\mathbb{C}}$ とおく．組 $(V_1,\cdots,V_n)$ が**複素旗**であるとは，$0<d_1<\cdots<d_k(=n)$ となるときを言う．このとき，組 $(d_1,\cdots,d_k)$ を複

素旗 $(V_1, \cdots, V_k)$ の**符号** (signature) という．符号 $(d_1, \cdots, d_k)$ の複素旗の全体 $F_{(d_1,\cdots,d_k)}(\mathbb{C})$ を**複素旗多様体** (complexl flag manifold) という．特に，$(d_1, \cdots, d_k) = (1, \cdots, n)$ のとき，$F_{(1,\cdots,n)}(\mathbb{C})$ を**充満複素旗多様体** (full complex flag manifold) という．$GL(n, \mathbb{C})$ は $F_{(d_1,\cdots,d_k)}(\mathbb{C})$ に

$$
\begin{aligned}
&g(V_1, \cdots, V_k) = (gV_1, \cdots, gV_k) \\
&\text{ただし，}\quad g \in GL(n, \mathbb{C}), (V_1, \cdots, V_k) \in F_{(d_1,\cdots,d_k)}(\mathbb{C})
\end{aligned}
$$

によって作用する．この作用が推移的であることを示そう．そのために，$(V_1, \cdots, V_k) \in F_{(d_1,\cdots,d_k)}(\mathbb{C})$ とする．$\mathbb{C}^n$ に標準 Hermite 内積を入れ，V_1 の「正規直交基底」を拡張し V_2 の「正規直交基底」をつくり，$\cdots$，V_{k-1} の「正規直交基底」を拡張し $V_k = \mathbb{C}^n$ の「正規直交基底」$\{u_1, \cdots, u_n\}$ をつくる．このとき，$g = (u_1, \cdots, u_n)$ とおくと，$g \in U(n)$ であり，自然な包含 $\mathbb{C}^{d_1} \subset \cdots \subset \mathbb{C}^{d_k}$ に対し，$g\mathbb{C}^{d_i} = V_i$ となるから，$F_{(d_1,\cdots,d_k)}(\mathbb{C})$ は $U(n)$-等質空間である．$k \in \mathbb{C}$ をうまくとり，$kg \in SU(n)$ とすると，$kg\mathbb{C}^{d_i} = V_i$ となるから，$F_{(d_1,\cdots,d_k)}(\mathbb{C})$ は $SU(n)$-等質空間でもある．イソトロピー部分群は

$$
\begin{aligned}
B &:= GL(n, \mathbb{C})_{(\mathbb{C}^{d_1}, \cdots, \mathbb{C}^{d_k})} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_{11} & * & * & * \\ & x_{22} & * & * \\ & & \ddots & * \\ & & & x_{kk} \end{pmatrix} \middle| \, x_{ii} \in M(d_i - d_{i-1}, \mathbb{C}) \right\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U(n)_{(\mathbb{C}^{d_1}, \cdots, \mathbb{C}^{d_k})} &= B \cap U(n) = U(d_1) \times U(d_2 - d_1) \times \cdots \times U(d_k - d_{k-1}), \\
SU(n)_{(\mathbb{C}^{d_1}, \cdots, \mathbb{C}^{d_k})} &= S(U(d_1) \times U(d_2 - d_1) \times \cdots \times U(d_k - d_{k-1}))
\end{aligned}
$$

よって，$F_{(d_1,\cdots,d_k)}(\mathbb{C})$ の等質空間としての表示

$$
\begin{aligned}
F_{(d_1,\cdots,d_k)}(\mathbb{C}) &= GL(n, \mathbb{C})/B \\
&= U(n)/(U(d_1) \times U(d_2 - d_1) \times \cdots \times U(d_k - d_{k-1})) \\
&= SU(n)/S(U(d_1) \times U(d_2 - d_1) \times \cdots \times U(d_k - d_{k-1}))
\end{aligned}
$$

が得られる．

5.5 Euclid 空間の内積全体

$\mathbb{R}^n$ の内積全体を M と表す．M に $GL(n, \mathbb{R})$ は次のように働く．

$$
(g\langle\ ,\ \rangle)(x, y) = \langle g^{-1}x, g^{-1}y \rangle \qquad (g \in GL(n, \mathbb{R}), \langle\ ,\ \rangle \in M, x, y \in \mathbb{R}^n)
$$

$\mathbb{R}^n$ の標準基底を $\{e_1, \cdots, e_n\}$，標準内積を $\langle\ ,\ \rangle_0$ とする．$\langle\ ,\ \rangle \in M$ に関する正規直交基底 $\{g_1, \cdots, g_n\}$ を一つとる．このとき，$g := (g_1, \cdots, g_n) \in GL(n, \mathbb{R})$ であり，$\langle g_i, g_j \rangle = \delta_{ij}$．$ge_i = g_i$ だから，

$$(g^{-1}\langle\ ,\ \rangle)(e_i, e_j) = \langle ge_i, ge_j \rangle = \langle g_i, g_j \rangle = \delta_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle_0$$

ゆえに，$g^{-1}\langle\ ,\ \rangle = \langle\ ,\ \rangle_0$．よって，$GL(n, \mathbb{R})$ は M に推移的に作用する．以上より，M の等質空間としての表示 $M = GL(n, \mathbb{R})/O(n)$ が得られる．

5.6 Lagrange 部分空間全体

複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ の標準基底を $\{e_1, \cdots .e_n\}$ で表すと，

$$\{e_1, \cdots, e_n, ie_1, \cdots, ie_n\}$$

は $\mathbb{C}^n$ の係数体を $\mathbb{R}$ に制限した実ベクトル空間の基底になる．$\mathbb{R}^{2n}$ の標準基底を $\{e_1, \cdots, e_n, e_{n+1}, \cdots, e_{2n}\}$ と表し，$ie_j = e_{n+j}$ $(1 \leq j \leq n)$ と同一視すると，$\mathbb{R}$ 上ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ は $\mathbb{R}^{2n}$ と同一視される：

$$\mathbb{C}^n = \mathbb{C}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}e_n = \mathbb{R}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}e_n \oplus \mathbb{R}ie_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}ie_n = \mathbb{R}^{2n}$$

すなわち，

$$\mathbb{C}^n \leftrightarrow \mathbb{R}^{2n}; \begin{pmatrix} x_1 + iy_1 \\ \vdots \\ x_n + iy_n \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad (x_j, y_j \in \mathbb{R})$$

と同一視している．$\mathbb{C}^n$ の演算 $v \mapsto iv$ から $\mathbb{R}^{2n}$ に複素構造 J が誘導される：

$$Je_j = ie_j = e_{n+j}, \quad Je_{n+j} = i^2 e_j = -e_j \quad (1 \leq j \leq n)$$

行列表示では

$$J = \begin{pmatrix} O & -E_n \\ E_n & O \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^{2n}$ の標準内積を $\langle\ ,\ \rangle$ と表す．

$$u = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j + \sum_{j=1}^{n} y_j i e_j, \quad v = \sum_{j=1}^{n} x'_j e_j + \sum_{j=1}^{n} y'_j i e_j \in \mathbb{R}^{2n}$$

に対し，

$$\langle u, v\rangle = \sum_{j=1}^{n} (x_j x'_j + y_j y'_j)$$

ここで，

$$Ju = -\sum_{j=1}^{n} y_j e_j + \sum_{j=1}^{n} x_j i e_j, \quad Jv = -\sum_{j=1}^{n} y'_j e_j + \sum_{j=1}^{n} x'_j i e_j$$

だから，$\langle Ju, Jv\rangle = \langle u, v\rangle$．すなわち，$J \in O(2n)$．特に，$\|Ju\| = \|u\|$．また，

$$\langle Ju, u\rangle = \langle J^2 u, Ju\rangle = -\langle u, Ju\rangle = -\langle Ju, u\rangle$$

より，$\langle Ju, u\rangle = 0$ が得られる．次に同一視 $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ の下で $U(n)$ の $\mathbb{C}^n$ への作用を $\mathbb{R}^{2n}$ への作用として書けば

$$U(n) \cong \left\{ \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} A + iB \in U(n), \\ A, B \in M_n(\mathbb{R}) \end{array} \right\} \subset O(2n)$$

が得られる．特に $U(n)$ の $\mathbb{R}^{2n}$ への作用は標準内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を保つ．$U(n)$ の $\mathbb{C}^n$ への作用は複素線形だから，任意の $g \in U(n)$ について $gJ = Jg$ が得られる．

$\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$ の実 n 次元実部分空間 V が **Lagrange 部分空間**であるとは，$V \perp JV$ となるときを言う．例えば，$\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ は Lagrange 部分空間である．$\mathbb{C}^n$ の Lagrange 部分空間全体 $\mathrm{Lag}(n)$ に $U(n)$ は推移的に作用する．$\mathbb{R}^n$ におけるイソトロピー部分群は $O(n)$ である．ゆえに，$\mathrm{Lag}(n)$ の等質空間としての表示 $\mathrm{Lag}(n) = U(n)/O(n)$ が得られた．

問題 5.6. $g \in U(n)$ に対して，$\theta(g) = \bar{g}$ とおく．次を示せ．

(1) $g \in U(n)$ に対して，$\theta(g) \in U(n)$．

(2) $g_1, g_2 \in U(n)$ に対して，$\theta(g_1 g_2) = \theta(g_1)\theta(g_2)$．

(3) $\theta^2 = 1$

(4) $O(n) = \{g \in U(n) \mid \theta(g) = g\}$．

5.7 $O(2n)/U(n)$

$\mathbb{R}^{2n}$ の標準内積を $\langle\ ,\ \rangle$ と表す．$\mathbb{R}^{2n}$ の複素構造 J で

$$\langle Jx, Jy\rangle = \langle x, y\rangle \qquad (x, y \in \mathbb{R}^{2n})$$

を満たすものの全体を $\mathcal{J}$ と表す：

$$\mathcal{J} = \{J \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^{2n}) \mid J^2 = -1, \langle Jx, Jy\rangle = \langle x, y\rangle \quad (x, y \in \mathbb{R}^{2n})\}$$

$O(2n)$ は次のようにして，$\mathcal{J}$ に作用する：

$$\rho(g)J = gJg^{-1} \quad (g \in O(2n), J \in \mathcal{J}\}$$

$J \in \mathcal{J}$ に対し，

$$\langle Jx, y\rangle = \langle J^2x, Jy\rangle = -\langle x, Jy\rangle$$

だから，J は $\langle\ ,\ \rangle$ に関して交代的である．交代行列の特殊直交行列に関する標準形の議論から，$g \in SO(2n)$ が存在して，

$$gJg^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\epsilon_1 & & & \\ \epsilon_1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & -\epsilon_n \\ & & & \epsilon_n & 0 \end{pmatrix}$$

$J^2 = -1$ より，$\epsilon_i = \pm 1$．さらに，$h \in O(2n)$ が存在して，

$$hgJg^{-1}h^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & -1 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ゆえに，$O(2n)$ は $\mathcal{J}$ に推移的に作用する．

$$J_0 = \begin{pmatrix} O & -E_n \\ E_n & O \end{pmatrix} \in \mathcal{J}$$

におけるイソトロピー部分群は

$$U(n) \cong \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \, a + ib \in U(n) \right\}$$

よって，$\mathcal{J}$ の等質空間としての表示 $\mathcal{J} = O(2n)/U(n)$ が得られた．

5.8 $G_p(\mathbb{R}_p^{p+q})$

補題 5.1. V を有限次元実ベクトル空間，$\langle\ ;\ \rangle$ を V 上の非退化対称双一次形式とする．V の部分空間 W に対し，V の部分空間 $W^\perp$ を

$$W^\perp = \{x \in V \mid \langle x, W\rangle = \{0\}\}$$

と定める．このとき，$\dim V = \dim W + \dim W^\perp, (W^\perp)^\perp = W$ が成り立つ．

証明. $n = \dim V, p = \dim W$ とおく．W の基底 $\{u_1, \cdots, u_p\}$ を V の基底 $\{u_1, \cdots, u_p, u_{p+1}, \cdots, u_n\}$ に拡張する．$\langle\ ,\ \rangle$ は非退化だから，n 次実対称行列

$$B := (b_{ij}) := \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (\langle u_i, u_j\rangle)$$

は正則行列である．このとき，

$$\begin{aligned}
W^\perp &= \{\sum_{i=1}^n x_i u_i \mid \langle u_j, \sum_{i=1}^n x_i u_i\rangle = 0 \quad (1 \le j \le p)\} \\
&= \left\{ \sum_{i=1}^n x_i u_i \mid \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \sum_{i=1}^n x_i u_i \mid \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \right\}
\end{aligned}$$

ここで，B は正則だから，$\{b_1, \cdots, b_n\}$ は線形独立である．よって，$\{b_1, \cdots, b_p\}$ も線形独立であり，

$$\mathrm{rank} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} = p$$

ゆえに，$\dim W^\perp = n - p$ となり，$\dim V = \dim W + \dim W^\perp$．$W^\perp$ の定義より，$W \subset (W^\perp)^\perp$ であるが，上に述べたことから，

$$\dim (W^\perp)^\perp = n - \dim W^\perp = n - (n - \dim W) = \dim W$$

ゆえに，$(W^\perp)^\perp = W$． □

補題 5.2. V を有限次元実ベクトル空間，$\langle\ ,\rangle$ を V 上の非退化対称双一次形式とする．W は V の部分空間で，$\langle\ ,\rangle$ の W への制限も非退化と仮定する．このとき，$\langle\ ,\rangle$ の $W^\perp$ への制限も非退化で，

$$V = W \oplus W^\perp \quad (\text{直交直和})$$

が成り立つ．

証明. $\langle\ ,\rangle$ の W への制限も非退化だから，

$$W \cap W^\perp = \{x \in W \mid \langle x, W\rangle = \{0\}\} = \{0\}$$

よって，$W + W^\perp = W \oplus W^\perp \subset V$．前補題より，

$$\dim(W \oplus W^\perp) = \dim W + \dim W^\perp = \dim V$$

だから，$V = W \oplus W^\perp$．$x \in W^\perp$ が $\langle x, W^\perp\rangle = \{0\}$ を満たしたとすると，$V = W \oplus W^\perp$ より，$\langle x, V\rangle = \{0\}$．$\langle\ ,\rangle$ は V 上で非退化だから，$x = 0$．ゆえに，$\langle\ ,\rangle$ は $W^\perp$ 上で非退化である． □

$\mathbb{R}^{p+q}_p = (\mathbb{R}^{p+q}, \langle\ ,\ \rangle)$ 内の p 次元部分空間 V で $\langle\ .\ \rangle$ の V への制限が正定値となるものの全体を $G_p(\mathbb{R}^{p+q}_p)$ と表す．たとえば $\mathbb{R}^p \in G_p(\mathbb{R}^{p+q}_p)$ である．$V \in G_p(\mathbb{R}^{p+q}_p)$ に対し，$\mathbb{R}^{p+q}_p$ の部分空間 $V^\perp$ を

$$V^\perp = \{x \in V \mid \langle x, V\rangle = \{0\}\}$$

と定めると，$\langle\ .\ \rangle$ の V への制限が正定値となることから，

$$\mathbb{R}^{p+q}_p = V \oplus V^\perp \quad (\text{直交直和})$$

が成り立つ．$\langle\ .\ \rangle$ の $V^\perp$ への制限も非退化でその符号数は，Sylvester の慣性法則より，$(0, q)$ になる．すなわち，$\langle\ .\ \rangle$ の $V^\perp$ への制限は負定値である．そこで V の正規直交基底 $\{u_1, \cdots, u_p\}$ ($\langle u_i, u_j\rangle = \delta_{ij}$) と $V^\perp$ の正規直交基底 $\{v_1, \cdots, v_q\}$ ($\langle v_i, v_j\rangle = -\delta_{ij}$) を並べて $\mathbb{R}^{p+q}_p$ の正規直交基底 $\{u_1, \cdots, u_p, v_1, \cdots, v_q\}$ をつくり，$g := (u_1, \cdots, u_p, v_1, \cdots, v_q)$ とおくと，$g \in O(p, q)$ であり，$g\mathbb{R}^p = V$．よって，$G_p(\mathbb{R}^{p+q}_p)$ は $O(p, q)$-等質空間である．必要があれば，u_1 を $-u_1$ に v_1 を $-v_1$ に置き換えることにより，$G_p(\mathbb{R}^{p+q}_p)$ は $SO_0(p, q)$-等質空間でもある．特に，$G_p(\mathbb{R}^{p+q}_p)$ は $SO(p, q)$-等質空間でもある．$\mathbb{R}^p$ におけるイソトロピー部分群は

$$\begin{aligned}
&O(p, q)_{\mathbb{R}^p} = O(p) \times O(q), \\
&SO(p, q)_{\mathbb{R}^p} = O(p, q)_{\mathbb{R}^p} \cap SO(p, q) = S(O(p) \times O(q)), \\
&SO_0(p, q)_{\mathbb{R}^p} = SO(p, q)_{\mathbb{R}^p} \cap SO_0(p, q) = SO(p) \times SO(q)
\end{aligned}$$

よって，$G_p(\mathbb{R}_p^{p+q})$ の等質空間としての表示

$$
\begin{aligned}
G_p(\mathbb{R}_p^{p+q}) &= O(p,q)/(O(p)\times O(q)) \\
&= SO(p,q)/S(O(p)\times O(q)) \\
&= SO_0(p,q)/(SO(p)\times SO(q))
\end{aligned}
$$

が得られる．

参考文献

[1] F. R. Harvey, Spinors and calibrations, Academic Press (1990)

[2] S. Helgason, Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Academic Press, (1978)

[3] 岩堀長慶編，線形代数学，裳華房

[4] 山内恭彦，杉浦光夫共著，連続群論入門，培風館

6 問題解答

問題 1.1. 次を示せ.

(1) 2 次交代行列

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{に対して} \exp tJ = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

(2) 2 次対称行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{に対して} \exp tA = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}.$$

(3) 成分が全て 1 の n 次正方行列

$$X = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \text{に対して} \exp tX = E_n + \frac{1}{n}(e^{tn} - 1)X$$

証明. (1) $J^2 - -1$ より，$J^{2n} = (-1)^n, J^{2n+1} = (-1)^n J$. これらを用いて

$$\begin{aligned}
\exp tJ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} J^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} J^{2n+1} \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} \right) 1 + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) J \\
&= (\cos t)1 + (\sin t)J \\
&= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(2) $A^2 = 1$ より，$A^{2n} = 1, A^{2n+1} = A$. これらを用いて

$$\begin{aligned}
\exp tA &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} A^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} A^{2n+1} \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \right) 1 + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) A \\
&= (\cosh t)1 + (\sinh t)A \\
&= \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(3) $X^2 = nX, X^3 = n^2X, \cdots, X^k = n^{k-1}X$ $(k = 1, 2, \cdots)$ が成り立つ．これを用いて，

$$\exp tX = 1 + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} n^{k-1}\right) X = 1 + \frac{1}{n}(e^{tn} - 1)X$$

□

問題 1.2. 次を示せ．

(1) $(a, b) \neq (0, 0)$ となる実数 a, b に対し，$\lambda = \sqrt{a^2 + b^2}$ とおく．

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

に対し，

$$\exp X = \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} \lambda \cosh \lambda + a \sinh \lambda & b \sinh \lambda \\ b \sinh \lambda & \lambda \cosh \lambda - a \sinh \lambda \end{pmatrix}$$

(2) $(c, d) \neq (0, 0)$ となる実数 c, d に対し，

$$Y = \begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix}$$

とおく．この Y と (1) の X について，$\exp X = \exp Y$ ならば，$X = Y$．

証明. (1) $X^2 = \lambda^2 E_2$ より，$X^2 = \lambda^2 E_2$．両辺を m 乗して，$X^{2m} = \lambda^{2m} E_2$．両辺に X をかけて $X^{2m+1} = \lambda^{2m} X$．以上より，

$$\begin{aligned}
\exp X &= \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2m}}{(2m)!}\right) E_2 + \frac{1}{\lambda} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2m+1}}{(2m+1)!}\right) X \\
&= \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} \lambda \cosh \lambda + a \sinh \lambda & b \sinh \lambda \\ b \sinh \lambda & \lambda \cosh \lambda - a \sinh \lambda \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(2) 仮定より，$\mathrm{tr}(\exp X) = \mathrm{tr}(\exp Y)$ だから，$2 \cosh \lambda = 2 \cosh \sqrt{c^2 + d^2}$．よって，$\lambda = \sqrt{c^2 + d^2} (\neq 0)$．仮定より

$$a \sinh \lambda = c \sinh \lambda, \quad b \sinh \lambda = d \sinh \lambda.$$

ゆえに，$a = c, b = d$ となり，$X = Y$ が得られる． □

問題 1.3. 定理 1.2 中の $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ は X の固有値全部と一致することを示せ．

証明. X の固有多項式を $f_X(\lambda)$ と表すと，

$$\begin{aligned}
f_X(\lambda) &= \left| \lambda E - \begin{pmatrix} J_{n_1}(\alpha_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_k}(\alpha_k) \end{pmatrix} \right| \\
&= \begin{vmatrix} \lambda E_{n_1} - J_{n_1}(\alpha_1) & & \\ & \ddots & \\ & & E_{n_k} - J_{n_k}(\alpha_k) \end{vmatrix} \\
&= |\lambda E_{n_1} - J_{n_1}(\alpha_1)| \cdots |E_{n_k} - J_{n_k}(\alpha_k)| \\
&= (\lambda - \alpha_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \alpha_k)^{n_k}
\end{aligned}$$

よって，$\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ は X の固有値全部と一致する． □

問題 1.4. $X \in M_n(\mathbb{C})$ について，次を示せ．

(1) $\overline{\exp X} = \exp \overline{X}$

(2) $\exp X^* = (\exp X)^*$

証明. (1) 任意の自然数 N について，

$$\overline{\sum_{m=0}^{N} \frac{1}{m!} X^m} = \sum_{m=0}^{N} \frac{1}{m!} \overline{X}^m$$

$N \to \infty$ とすると，$\overline{\exp X} = \exp \overline{X}$．

(2) (1) の結果を用いて，

$$\begin{aligned}
\exp X^* &= \exp \overline{{}^t X} = \overline{\exp {}^t X} \qquad ((1) \text{ より}) \\
&= \overline{{}^t(\exp X)} = (\exp X)^*
\end{aligned}$$

□

問題 1.5. 定理 1.5 と**定理 1.3**, (2) を用いて次を示せ．$X \in M_n(\mathbb{C})$ とする．$M_n(\mathbb{C})$ 内の曲線 $C(t)$ が初期条件 $C(0) = 1$ を満たす微分方程式 $\dot{C}(t) = C(t)X$ の解ならば $C(t) = \exp tX$ となる．

証明. $A(t) = {}^tC(t)$ とおくと，$A(0) = {}^t1 = 1$．また，

$$\dot{A}(t) = \frac{d}{dt}{}^tC(t) = {}^t\dot{C}(t) = {}^t(C(t)X) = {}^tX{}^tC(t) = {}^tXA(t)$$

定理 1.5 より，$A(t) = \exp t{}^tX$．定理 1.3, (2) より $C(t) = {}^t(\exp t{}^tX) = \exp tX$． □

問題 1.6. 次の行列 A について $\exp tA$ を求めよ．

$$(1)\quad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \qquad\qquad (2)\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

解答. A の固有多項式を $f_A(t) = |tE - A|$ と表す．

(1) $f_A(t) = (t-1)(t-2)$ より，A の固有値は 1 と 2．これらに対する固有ベクトルを並べて

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

とおくと，P は正則であり，

$$A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1}$$

よって，

$$\exp tA = P\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 3e^{2t} - 2e^t & 2(e^{2t} - e^t) \\ -3(e^{2t} - e^t) & -2e^{2t} + 3e^t \end{pmatrix}$$

(2) $f_A(t) = (t-2)^2$ より，A の固有値は 2(重解)．固有値 2 に対する固有ベクトルは $a\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $(a \neq 0)$．

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくと P は正則であり，$P^{-1}AP = 2E + N$．ただし，

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad n^2 = 0$$

以上より，

$$P^{-1}(\exp tA)P = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

よって，

$$\exp tA = e^{2t}\begin{pmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{pmatrix}$$

□

問題 1.7. $a^2+b^2>0$ となる実数 a,b に対して，3 次正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a & 0 \\ a & 0 & -b \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$$

と定める．このとき，$\exp tA$ を求めよ．

解答. $c=\sqrt{a^2+b^2}>0$ とおくと，A の固有値は $\pm ci, 0$.

$$g = \begin{pmatrix} 0 & -a/c & b/c \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & b/c & a/c \end{pmatrix}$$

とおくと，$g \in SO(3)$ であり，

$$A = g\begin{pmatrix} 0 & -c & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}{}^t g$$

よって，

$$\begin{aligned}
\exp tA &= g\begin{pmatrix} \cos ct & -\sin ct & 0 \\ \sin ct & \cos ct & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}{}^t g \\
&= \begin{pmatrix} \frac{b^2}{c^2}+\frac{a^2}{c^2}\cos ct & -\frac{a}{c}\sin ct & \frac{ab}{c^2}(1-\cos ct) \\ \frac{a}{c}\sin ct & \cos ct & -\frac{b}{c}\sin ct \\ \frac{ab}{c^2}(1-\cos ct) & \frac{b}{c}\sin ct & \frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}\cos ct \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

□

問題 1.8. 定理 1.5 を用いて公式 $\exp(s+t)X = \exp sX \exp tX$ を示せ．

解答. $A(t) = \exp tX$ とおく．$A(t+s)A(s)^{-1}(s) = A(t)$ を示せばよい．$t=0$ のとき，左辺 $= A(s)A(s)^{-1} = E$．左辺の微分は

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(A(t+s)A(s)^{-1}) &= \left(\frac{d}{dt}A(t+s)\right)A(s)^{-1} \\ &= \left(\frac{d}{du}A(u)_{u=t+s}\right)A(s)^{-1} \\ &= XA(t+s)A(s)^{-1} \qquad (\text{定理 } 1.5)\end{aligned}$$

よって，定理 1.5 より，$A(t+s)A(s)^{-1}(s) = A(t)$． □

問題 1.9.

$$\begin{aligned}&\mathrm{Sym}(2) = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \mid {}^tX = X\}, \\ &\mathrm{Sym}^+(2) = \{X \in \mathrm{Sym}(2) \mid X \text{ は正定値 }\}, \\ &GL^+(2,\mathbb{R}) = \{X \in GL(2,\mathbb{R}) \mid |X| \neq 0\}\end{aligned}$$

とおく．次を示せ．

(1) $\exp : \mathrm{Sym}(2) \to \mathrm{Sym}^+(2); X \mapsto \exp X$ は全単射である．

(2) [$GL^+(2,\mathbb{R})$ の極分解] $SO(2) \times \mathrm{Sym}(2) \to GL^+(2,\mathbb{R}); (g,X) \mapsto g\exp X$ は全単射である．

証明. (1) 全射性は明らかなので単射性を示す．$X, Y \in \mathrm{Sym}(2)$ が $\exp X = \exp Y$ を満たしたとすると，$\exp X$ と $\exp Y$ の固有値全部の集合は一致する．ゆえに，X と Y の固有値全部の集合は一致する．よって，$g \in SO(2)$ が存在して，$Y = gX{}^tg$．仮定より，

$$\exp X = \exp Y = g(\exp X){}^tg$$

$h \in SO(2)$ が存在して，

$$X = h\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}{}^th$$

このとき，

$$h\begin{pmatrix}e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2}\end{pmatrix}{}^th = gh\begin{pmatrix}e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2}\end{pmatrix}{}^th{}^tg$$

ここで，

$$SO(2) \ni x := {}^t hgh = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

とおくと，

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix}$$

これより，$\lambda_1 = \lambda_2$ または $\sin\theta = 0$ が得られる．

$\lambda_1 = \lambda_2$ のとき，$X = \lambda_1 E = Y$．

$\sin\theta = 0$ のとき，$gh = \pm h$ より，$g = \pm E$，よって $Y = X$．

いずれも場合も $X = Y$ が得られる．

(2) まず，全射性を示す．$x \in GL^+(2, \mathbb{R})$ に対して，${}^t xx$ は正定値対称行列だから，(1) より一意に $X \in \mathrm{Sym}(2)$ が存在して，${}^t xx = \exp 2X$．$g := x\exp(-X)$ とおくと，$|g| = |x|e^{-\mathrm{tr}(X)} > 0$．さらに，

$${}^t gg = \exp(-X){}^t xx\exp(-X) = E$$

だから，$g \in SO(2)$ であり，$x = g\exp X$．ゆえに全射性が示された．

次に単射性を示す．$g_1, g_2 \in SO(2), X_1, X_2 \in \mathrm{Sym}(2)$ に対し，

$$g_1 \exp X_1 = g_2 \exp X_2$$

と仮定すると，

$$SO(2) \ni g_2^{-1} g_1 = \exp X_2 \exp(-X_1)$$

よって

$$E = {}^t gg = \exp(-X_1)\exp 2X_2 \exp(-X_1)$$

よって，$\exp 2X_1 = \exp 2X_2$ が得られ，(1) より $X_1 = X_2$．このとき，$g_1 = g_2$．ゆえに単射性も示された．　□

問題 1.10. [前問の続き]

$$\begin{aligned} \mathrm{Sym}^0(2) &= \{X \in \mathrm{Sym}(2) \mid \mathrm{tr}(X) = 0\}, \\ S(\mathrm{Sym}^+(2)) &= \{X \in \mathrm{Sym}^+(2) \mid |X| = 1\} \end{aligned}$$

とおく．次を示せ．

(1) $\exp : \mathrm{Sym}^0(2) \to S(\mathrm{Sym}^+(2)); X \mapsto \exp X$ は全単射である．

(2) [$SL(2,\mathbb{R})$ の極分解] $SO(2)\times\mathrm{Sym}^0(2) \to SL(2,\mathbb{R}); (g,X) \mapsto g\exp X$ は全単射である．

証明. (1) 単射性は全問 (1) の単射性から従う．全射性は全問 (1) と同様にして示される．

(2) 単射性は全問 (2) の単射性から従う．全射性を示す．任意の $x \in SL(2,\mathbb{R}) \subset GL(2,\mathbb{R})$ に対し，(2) より $g \in SO(2)$ と $X \in \mathrm{Sym}(2)$ が存在して，$x = g\exp X$．このとき，

$$1 = |x| = |\exp X| = e^{\mathrm{tr}(X)}$$

より，$\mathrm{tr}(X) = 0$ となり，$X \in \mathrm{Sym}^0(2)$．ゆえに全射性が示された． □

問題 1.11. 写像

$$SO(2)\times\mathbb{R}^2 \to SL(2,\mathbb{R});$$
$$\left(\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}, (s,t)\right) \mapsto \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^t & se^t\\ 0 & e^{-t}\end{pmatrix}$$

は全単射であることを示せ．

証明. 記述を簡単にするために

$$R(\theta) = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

とおく．始めに単射性を示す．

$$R(\theta_1)R(\theta_1)\begin{pmatrix}e^{t_1} & s_1e^{t_1}\\ 0 & e^{-t_1}\end{pmatrix} = R(\theta_2)\begin{pmatrix}e^{t_2} & s_2e^{t_2}\\ 0 & e^{-t_2}\end{pmatrix}$$

と仮定すると，

$$R(\theta_1-\theta_2) = R(\theta_1)\begin{pmatrix}e^{t_2-t_1} & (s_2-s_1)e^{t_1+t_2}\\ 0 & e^{-t_2+t_1}\end{pmatrix}$$

成分を比較して，

$$\sin(\theta_1-\theta_2) = 0, s_1 = s_2, \cos(\theta_1-\theta_2) = e^{t_2-t_1} = e^{-t_2+t_1} > 0$$

よって，$\sin\theta_1 = \sin\theta_2, \cos\theta_1 = \cos\theta_2, t_1 = t_2$．ゆえに単射性が示された．

全射性を示す．

$$x = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$$

に対し，

$$R = \frac{1}{\sqrt{x_{11}^2 + x_{21}^2}} \begin{pmatrix} x_{11} & -x_{21} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$$

とおくと，$R \in SO(2)$ であり，

$$R^{-1}x = \begin{pmatrix} \sqrt{x_{11}^2 + x_{21}^2} & \frac{x_{11}x_{12}+x_{21}x_{22}}{\sqrt{x_{11}^2+x_{21}^2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{x_{11}^2+x_{21}^2}} \end{pmatrix}$$

$\sqrt{x_{11}^2 + x_{21}^2} > 0$ より，$t > 0$ が存在して，$e^t = \sqrt{x_{11}^2 + x_{21}^2}$．このとき，$e^{-t} = \frac{1}{\sqrt{x_{11}^2+x_{21}^2}}$．

$$s := \frac{x_{11}x_{12} + x_{21}x_{22}}{x_{11}^2 + x_{21}^2} = \frac{x_{11}x_{12} + x_{21}x_{22}}{\sqrt{x_{11}^2 + x_{21}^2}} e^{-t}$$

とおくと，

$$\frac{x_{11}x_{12} + x_{21}x_{22}}{\sqrt{x_{11}^2 + x_{21}^2}} = se^t$$

よって，

$$R^{-1}x = \begin{pmatrix} e^t & se^t \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

となり，全射性が示された． $\square$

問題 1.12. $\varphi : GL(n, K) \to GL(n, K)$ が準同型写像ならば，$\varphi(E_n) = E_n$ となることを示せ．ただし，E_n は n 次単位行列である．

$\varphi(E_n) = \varphi(E_n^2) = (\varphi(E_n))^2$．$\varphi(E_n)$ は正則行列だから，両辺に $\varphi(E_n)^{-1}$ をかけて，$\varphi(E_n) = E_n$．

問題 1.13. 次を示せ．

(1) 恒等写像 $\mathbf{1} : GL(n, K) \to GL(n, K)$ の微分写像は恒等写像 $\mathbf{1} : \mathfrak{gl}(n, K) \to \mathfrak{gl}(n, K)$ である．

(2) 可微分準同型写像 $\varphi : GL(n, K) \to GL(n, K)$ が $\varphi^m = \mathbf{1}$ を満たすならば，$(d\varphi)^m = \mathbf{1}$ となる．

証明. (1) は明らかである.

(2) は (1) の結果を用いて，$(d\varphi)^m = d(\varphi^m) = d\mathbf{1} = \mathbf{1}$.

$\square$

問題 1.14. 二つの可微分準同型写像 $\varphi_1, \varphi_2 : GL(n, K) \to GL(n, K)$ に対し，$d(\varphi_1\varphi_2) = (d\varphi_1)(d\varphi_2)$ が成り立つことを示せ.

証明. 仮定より，$\varphi_1\varphi_2$ も可微分準同型写像である.

$$\begin{aligned} \exp td(\varphi_1\varphi_2)X &= \varphi_1\varphi_2(\exp tX) \qquad (d(\varphi_1\varphi_2)\text{ の定義}) \\ &= \varphi_1(\exp t(d\varphi_2)X) \qquad (d\varphi_2\text{ の定義}) \\ &= \exp t(d\varphi_1)(d\varphi_2)X \qquad (d\varphi_1\text{ の定義}) \end{aligned}$$

ゆえに，$d(\varphi_1\varphi_2) = (d\varphi_1)(d\varphi_2)$. $\square$

問題 1.15. 次を示せ.

(1) $\varphi : GL(n, K) \to GL(n, K); g \mapsto {}^t g^{-1}$ は可微分準同型写像であることを示せ．また，$(d\varphi)X = -{}^t X$ となることを示せ.

(2) $\varphi : GL(n, \mathbb{C}) \to GL(n, \mathbb{C}); g \mapsto \overline{g}$ は可微分準同型写像であることを示せ．また，$(d\varphi)X = \overline{X}$ となることを示せ.

証明. (1) φ が可微分準同型写像になることは明らかである.

$$\varphi(\exp tX) = {}^t(\exp tX)^{-1} = \exp(-t{}^t X)$$

ゆえに，$(d\varphi)(X) = -{}^t X$.

(2) φ が可微分準同型写像になることは明らかである.

$$\varphi(\exp tX) = \overline{\exp tX} = \exp t\overline{X}$$

よって，$(d\varphi)(X) = \overline{X}$. $\square$

問題 1.16. $a \in GL(n, K)$ に対し，可微分同型写像 $\varphi_a : GL(n, K) \to GL(n, K)$ を $\varphi_a(g) = aga^{-1}$ と定める．φ_a の微分写像 $d\varphi_a$ は

$$d\varphi_a(X) = aXa^{-1}$$

で与えられることを示せ.

証明. 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し,

$$\varphi_a(\exp tX) = a(\exp tX)a^{-1} = \exp t(aXa^{-1})$$

よって, $d\varphi_a(X) = aXa^{-1}$. $\square$

問題 1.17. $a, b \in GL(n, K), X, Y \in \mathfrak{gl}(n, K)$ に対して, 次を示せ.

(1) $\mathrm{Ad}(ab) = \mathrm{Ad}(a)\mathrm{Ad}(b)$

(2) $\mathrm{Ad}(a^{-1}) = (\mathrm{Ad}(a))^{-1}$

(3) $\mathrm{Ad}(a)[X, Y] = [\mathrm{Ad}(a)X, \mathrm{Ad}(a)Y]$

証明. (1) Ad の定義から

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}(ab)X &= (ab)X(ab)^{-1} = a(bXb^{-1})a^{-1} = a(\mathrm{Ad}(b)X)a^{-1} \\ &= \mathrm{Ad}(a)\mathrm{Ad}(b)X\end{aligned}$$

(2) (1) の結果を用いて, $\mathrm{Ad}(a)\mathrm{Ad}(a^{-1}) = \mathrm{Ad}(aa^{-1}) = \mathrm{Ad}(E_n) = 1$. 同様に, $\mathrm{Ad}(a^{-1})\mathrm{Ad}(a) = 1$. ゆえに, $\mathrm{Ad}(a^{-1}) = (\mathrm{Ad}(a))^{-1}$.

(3) $[X, Y] = XY - YX$ を用いて,

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}(a)[X, Y] &= a(XY - YX)a^{-1} = (aXa^{-1})(aYa^{-1}) - (aYa^{-1})(aXa^{-1}) \\ &= [aXa^{-1}, aYa^{-1}] = [\mathrm{Ad}(a)X, \mathrm{Ad}(a)Y]\end{aligned}$$

$\square$

問題 2.1. $\mathfrak{g}$ を実 Lie 環とする. $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \{X + iY \mid X, Y \in \mathfrak{g}\}$ で実ベクトル空間 $\mathfrak{g}$ の複素化を表す. $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{g}$ に対し,

$$[X_1 + iX_2, Y_1 + iY_2] = ([X_1, Y_1] - [X_2, Y_2]) + i([X_2, Y_1] + [X_1, Y_2]) \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$$

で $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ に $[\ ,\ ]$ を定義すると, $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ は複素 Lie 環になることを示せ.

問題 2.2. $X, Y \in \mathfrak{g}$ について, $\mathrm{ad}[X, Y] = [\mathrm{ad}(X), \mathrm{ad}(Y)]$.

証明. Jacobi の恒等式から

$$\begin{aligned}(\mathrm{ad}[X, Y])Z &= [[X, Y], Z] \\ &= [[Y, Z], X] - [[Z, X], Y] \qquad \text{(Jacobi の恒等式)} \\ &= [X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]] \\ &= (\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y) - \mathrm{ad}(Y)\mathrm{ad}(X))(Z) \\ &= [\mathrm{ad}(X), \mathrm{ad}(Y)](Z)\end{aligned}$$

$\square$

問題 2.3. 次を示せ．

(1) $\partial(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ の部分環である．

(2) $D \in \partial(\mathfrak{g})$ と $X \in \mathfrak{g}$ に対し，$\mathrm{ad}(DX) = [D, \mathrm{ad}X]$.

(3) $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ は $\partial(\mathfrak{g})$ のイデアルである．

証明. (1) $D_1, D_2 \in \partial(\mathfrak{g}), X, Y \in \mathfrak{g}$ とする．このとき，

$$\begin{aligned} D_1D_2[X,Y] &= D_1([D_2X,Y] + [X, D_2Y]) \\ &= [D_1D_2X, Y] + [D_2X, D_1Y] + [D_1X, D_2Y] + [X, D_1D_2Y] \end{aligned}$$

D_1 と D_2 の役割を交換し，

$$D_2D_1[X,Y] = [D_2D_1X, Y] + [D_1X, D_2Y] + [D_2X, D_1Y] + [X, D_1D_2Y]$$

上二式の差をとり，

$$[D_1, D_2]([X,Y]) = [[D_1, D_2]X, Y] + [X, [D_1, D_2]Y]$$

よって，$[D_1, D_2] \in \partial(\mathfrak{g})$．ゆえに，$\partial(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ の部分環である．

(2) $Y \in \mathfrak{g}$ とする．

$$\begin{aligned} (\mathrm{ad}(DX))(Y) &= [DX, Y] \qquad (\mathrm{ad}\ \text{の定義}) \\ &= D[X,Y] - [X, DY] \qquad (D\text{: 微分}) \\ &= [D, \mathrm{ad}X](Y) \end{aligned}$$

よって，$\mathrm{ad}(DX) = [D, \mathrm{ad}X]$.

(3) (2) より，$[D, \mathrm{ad}X] = \mathrm{ad}(DX) \in \mathrm{ad}(\mathfrak{g})$．よって，$\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ は $\partial(\mathfrak{g})$ のイデアルである． □

問題 2.4. $\mathfrak{h}$ を Lie 環 $\mathfrak{g}$ のイデアルとする．$\mathfrak{g}$ の Killing 形式を B と表す．このとき，次を示せ．

(1) B の $\mathfrak{h}$ への制限 (正確には $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ への制限) は $\mathfrak{h}$ の Kiliing 形式に一致する．

(2) $\mathfrak{h}^\perp := \{X \in \mathfrak{g} \mid B(X, \mathfrak{h}) = \{0\}\}$ とおくと，$\mathfrak{h}^\perp$ も $\mathfrak{g}$ のイデアルである．

解答．(2)

$$B([\mathfrak{h}^{\perp}, \mathfrak{g}], \mathfrak{h}) = B(\mathfrak{h}^{\perp}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{h}]) \subset B(\mathfrak{h}^{\perp}, \mathfrak{h}) = \{0\}$$

よって，$\mathfrak{h}^{\perp}$ も $\mathfrak{g}$ のイデアルである． □

問題 2.5. [次元公式] V を実ベクトル空間，$\langle\ ,\ \rangle$ を V 上の対称双一次形式とする．部分空間 $W \subset V$ に対し，V の部分空間 $W^{\perp}$ を $W^{\perp} = \{v \in V \mid \langle v, W\rangle = \{0\}\}$ と定める．このとき，

$$\dim W + \dim W^{\perp} = \dim V + \dim(W \cap V^{\perp})$$

となることを示せ．また，$\langle\ ,\ \rangle$ が非退化のときには，

$$\dim W + \dim W^{\perp} = \dim V$$

となることを示せ．

証明．$\{E_1, \cdots, E_k\}$ を W の基底とし，これを拡張して V の基底

$$\{E_1, \cdots, E_k, E_{k+1}, \cdots, E_n\}$$

をつくる．このとき，

$$\begin{aligned} W^{\perp} &= \{\sum_{i=1}^{n} x_i E_i \mid \sum_{i=1}^{n} \langle E_i, E_l\rangle x_i = 0 \quad (1 \leq l \leq k)\} \\ &\cong \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \middle| \begin{pmatrix} \langle E_1, E_1\rangle & \cdots & \langle E_n, E_1\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle E_1, E_k\rangle & \cdots & \langle E_n, E_k\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

ここで，$A \in M(k, n; \mathbb{R})$ を

$$A = \begin{pmatrix} \langle E_1, E_1\rangle & \cdots & \langle E_n, E_1\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle E_1, E_k\rangle & \cdots & \langle E_n, E_k\rangle \end{pmatrix}$$

と定めると，$W^{\perp} \cong \mathrm{Ker}A$ だから，$\dim W^{\perp} = \dim \mathrm{Ker}A = \dim V - \mathrm{rank}A$．よって，

$$\dim W + \dim W^{\perp} = \dim V + (\dim W - \mathrm{rnak}A)$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
V^{\perp} \cap W &= \{\sum_{i=1}^{k} x_i E_i \mod \langle \sum_{i=1}^{k} x_i E_i, E_j \rangle = 0 \quad (1 \leq j \leq n)\} \\
&= \mathrm{Ker}({}^t A : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n\}
\end{aligned}
$$

より，$\dim(V^{\perp} \cap W) = \dim W - \mathrm{rank}{}^t A = \dim W - \mathrm{rank} A$.

$\langle\ ,\ \rangle$ が非退化のときには，$V^{\perp} = \{0\}$ となるから，

$$\dim W + \dim W^{\perp} = \dim V$$

が成り立つ． □

問題 2.6. $\mathfrak{g} \neq \{0\}$ を Lie 環とし，B をその Killing 形式とする．B は正定値にはならないことを示せ．

証明. B が正定値になったとすると，B に関する正規直交基底 $\{E_i\}$ が存在する．このとき，任意の $X \in \mathfrak{g}$ について，

$$
\begin{aligned}
0 \leq B(X, X) = \mathrm{tr}((\mathrm{ad} X)^2) &= \sum_i B((\mathrm{ad} X)^2 E_i, E_i) \\
&= -\sum_i B([X, E_i], [X, E_i]) \leq 0
\end{aligned}
$$

B は正定値だから，$X = 0$．よって，$\mathfrak{g} = \{0\}$ となり矛盾が起こる． □

問題 2.7. compact Lie 環の部分環は compact であることを示せ．

証明. $\mathfrak{g}$ を compact Lie 環とすると，定理 2.28 より $\mathfrak{g}$ 上に不変内積 $\langle\ ,\ \rangle$ が存在する．$\langle\ ,\ \rangle$ の $\mathfrak{g}$ の部分環 $\mathfrak{h}$ への制限は $\mathfrak{h}$ の不変内積になる．再び定理 2.28 より，$\mathfrak{h}$ は compact になる． □

問題 2.8. 可換 Lie 環は compact になることを示せ．

証明. 可換 Lie 環 $\mathfrak{g}$ 上の任意の内積は不変内積である．定理 2.28 より $\mathfrak{g}$ は compact である． □

問題 3.1. $g \in O(p+q)$ に対し，$|g| = \pm 1$ となることを示せ．

証明. ${}^t g g = 1$ の両辺の行列式をとると，

$$
\begin{aligned}
1 = |1| = |{}^t g g| &= |{}^t g||g| \qquad (\text{積公式}) \\
&= |g|^2 \qquad (\text{転置不変性})
\end{aligned}
$$

よって，$|g| = \pm 1$. □

問題 3.2. $SO(p,q), SO_0(p,q)$ の Lie 環は $\mathfrak{so}(p,q)$ に一致することを示せ．

問題 4.1. $A(n)$ は行列の和と実数倍に関して $\frac{n(n-1)}{2}$ 次元ベクトル空間になることを示せ．

証明．$A(n)$ が実ベクトル空間になることは明らかである．$\{E_{ij}-E_{ji} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ は $A(n)$ の基底になるので，$\dim A(n) = \frac{n(n-1)}{2}$． □

問題 4.2. 次を示せ．

(1) $\cos 2t = -1$ と $t \in \mathbb{R}$ をとるとき，

$$(\exp t\mathrm{ad}F_{jk}^{\pm})H_p = \begin{cases} \mp H_k & (p=j), \\ \mp H_j & (p=k), \\ H_l & (p \neq j,k) \end{cases}$$

(2) n が奇数のとき，

$$(\exp \pi\mathrm{ad}F_j^{\pm})H_p = \begin{cases} -H_j & (p=j), \\ H_l & (p \neq j) \end{cases}$$

証明．(1) $H \in \mathfrak{t}$ とする．自然数 l について

$$\begin{aligned}(\mathrm{ad}F_{jk}^{\pm})^{2l-1}H &= (-1)^l 2^{2l-2}(x_j \pm x_k)G_{jk}^{\pm}, \\ (\mathrm{ad}F_{jk}^{\pm})^{2l}H &= (-1)^l 2^{2l-1}(x_j \pm x_k)(H_j \pm H_k)\end{aligned}$$

まず，$t \in \mathbb{R}$ を任意とすると，上の関係式から

$$\begin{aligned}&(\exp t\mathrm{ad}F_{jk}^{\pm})H \\ &= H + \frac{1}{2}(\cos 2t - 1)(x_j \pm x_k)(H_j \pm H_k) - \frac{1}{2}(\sin 2t)(x_j \pm x_k)G_{jk}^{\pm}\end{aligned}$$

ここで，$\cos 2t = -1$ とすると，

$$(\exp t\mathrm{ad}F_{jk}^{\pm})H = H - (x_j \pm x_k)(H_j \pm H_k)$$

$H = H_p$ とおくと主張が得られる．
(2) $H \in \mathfrak{t}$ とする．自然数 l について

$$(\mathrm{ad}F_j)^{2l-1}H = (-1)^l x_j G_j, \quad (\mathrm{ad}F_j)^{2l}H = (-1)^l x_j H_j$$

これより任意の実数 t について

$$(\exp t\mathrm{ad}F_j)H = H + (\cos t - 1)x_jH_j - (\sin t)x_jG_j$$

$t = \pi$ とおくと，

$$(\exp \pi\mathrm{ad}F_j)H = H - 2x_jH_j$$

ここで，$H = H_p$ とおくと主張が得られる． □

問題 4.3. 次の条件をみたす $g \in SO(2m)$ は存在しないことを示せ：任意の $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m \in \mathbb{R}$ に対して

$$\mathrm{Ad}(g)\begin{pmatrix} \theta_1 J & & & \\ & \theta_2 J & & \\ & & \ddots & \\ & & & \theta_m J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\theta_1 J & & & \\ & \theta_2 J & & \\ & & \ddots & \\ & & & \theta_m J \end{pmatrix}$$

ただし，$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

証明. 仮にそのような g が存在したとして，$g = (g_{ij}), g_{ij} \in M(2, \mathbb{R})$ と表示すると，

$$g\begin{pmatrix} \theta_1 J & & & \\ & \theta_2 J & & \\ & & \ddots & \\ & & & \theta_m J \end{pmatrix} = (\theta_j g_{ij} J),$$

$$\begin{pmatrix} -\theta_1 J & & & \\ & \theta_2 J & & \\ & & \ddots & \\ & & & \theta_m J \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} -\theta_1 g_{11} J & \cdots & -\theta_1 J g_{1m} \\ \theta_2 J g_{21} & \cdots & \theta_2 J g_{2m} \\ \vdots & & \vdots \\ \theta_m J g_{m1} & \cdots & \theta_m J g_{mm} \end{pmatrix}$$

これより，与式が成り立つための必要十分条件は

$$\theta_j g_{1j} J = -\theta_1 J g_{1j}, \quad \theta_j g_{ij} J = \theta_i J g_{ij} \quad (i \geq 2)$$

よって，$i \neq j$ のとき，$g_{ij} = 0$ であり，$g_{ii} \in O(2), |g_{11}||g_{22}|\cdots|g_{mm}| = 1$ かつ

$$g_{11} J = -J g_{11}, \quad g_{ii} J = J g_{ii} \quad (i \geq 0)$$

が成り立つ．第一式から，$|g_{11}| = -1,$ 第二式から $|g_{ii}| = 1$ $(i \geq 2)$ が得られるので，これは $|g_{11}||g_{22}|\cdots|g_{mm}| = 1$ に矛盾する． □

問題 4.4. $\mathfrak{so}(n)$ の上記で定めた極大可換部分環 $\mathfrak{t}$ に対し，単位格子 $\Gamma = \{H \in \mathfrak{t} \mid \exp H = e\}$ を求めよ．

解答.

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -\theta_1 & & & & \\ \theta_1 & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & -\theta_m & \\ & & & \theta_m & 0 & \\ & & & & & (0) \end{pmatrix} \in \mathfrak{t}$$

に対して，

$$\exp H = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & & & & \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \cos\theta_m & -\sin\theta_m & \\ & & & \sin\theta_m & \cos\theta_m & \\ & & & & & (1) \end{pmatrix}$$

だから，

$$\Gamma = \left\{ 2\pi \begin{pmatrix} 0 & -\theta_1 & & & & \\ \theta_1 & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & -\theta_m & \\ & & & \theta_m & 0 & \\ & & & & & (0) \end{pmatrix} \middle| \theta_1, \cdots, \theta_m \in \mathbb{Z} \right\}$$

□

問題 4.5. 定理 4.13, (1) を用いて $W(T)$ の群の構造を $S_m \times \{\pm 1\}^m$ に移して考えれば，

$$(\sigma_1, \epsilon_1^1, \cdots, \epsilon_m^1)(\sigma_2, \epsilon_1^2, \cdots, \epsilon_m^2) = (\sigma_1\sigma_2, \epsilon_{\sigma_2(1)}^1\epsilon_1^2, \cdots, \epsilon_{\sigma_2(m)}^1\epsilon_m^2)$$

となることを示せ．

証明. $s_j \in W(T)$ $(j=1,2)$ に対応する $S_m \times \{\pm 1\}^m$ の元を $(\sigma_j, \epsilon_1^j, \cdots, \epsilon_m^j)$ と表すと，$s_j(H_i) = \epsilon_i^j H_{\sigma_j(i)}$. これを用いて

$$\begin{aligned}(\sigma_1, \epsilon_1^1, \cdots, \epsilon_m^1)(\sigma_2, \epsilon_1^2, \cdots, \epsilon_m^2)(H_j) &= (\sigma_1, \epsilon_1^1, \cdots, \epsilon_m^1)(\epsilon_j^2 H_{\sigma_2(j)}) \\ &= \epsilon_{\sigma_2(j)}^1 \epsilon_j^2 H_{\sigma_1\sigma_2(j)} \\ &= (\sigma_1\sigma_2, \epsilon_{\sigma_2(1)}^1 \epsilon_1^2, \cdots, \epsilon_{\sigma_2(m)}^1 \epsilon_m^2)(H_j)\end{aligned}$$

よって，$(\sigma_1, \epsilon_1^1, \cdots, \epsilon_m^1)(\sigma_2, \epsilon_1^2, \cdots, \epsilon_m^2) = (\sigma_1\sigma_2, \epsilon_{\sigma_2(1)}^1 \epsilon_1^2, \cdots, \epsilon_{\sigma_2(m)}^1 \epsilon_m^2)$. □

問題 4.6. $\mathfrak{t}$ を $\mathfrak{u}(n)$ の任意の極大可換部分環とする．このとき，$\mathfrak{z} \subset \mathfrak{t}$ となることを示せ．ここで，$\mathfrak{z}$ は $\mathfrak{u}(n)$ の中心を表す．

証明. 任意の $X \in \mathfrak{z}$ に対し，$\mathfrak{t}' = \mathfrak{t} + \mathbb{R}X$ とおくと，$\mathfrak{t}$ を含む可換部分環である．$\mathfrak{t}$ の極大性により，$\mathfrak{t} = \mathfrak{t}' = \mathfrak{t} + \mathbb{R}X \ni X$. よって，$\mathfrak{z} \subset \mathfrak{t}$. □

問題 4.7. $\mathfrak{u}(n)$ の上記で定めた極大可換部分環 $\mathfrak{t}$ に対し，単位格子 $\Gamma = \{H \in \mathfrak{t} \mid \exp H = e\}$ を求めよ．

解答.

$$\begin{aligned}\Gamma &= \{H \in \mathfrak{t} \mid \exp H = e\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} i\theta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & i\theta_n \end{pmatrix} \middle| \, e^{i\theta_j} = 1 \right\} \\ &= \left\{ 2\pi i \begin{pmatrix} m_1 & & \\ & \ddots & \\ & & m_n \end{pmatrix} \middle| \, m_1, \cdots, m_n \in \mathbb{Z} \right\}\end{aligned}$$

□

問題 4.8. 次を示せ．

(1) $SU(n)$ は行列の積に関して群になる．

(2)

$$\begin{aligned}SU(2) &= \left\{ \begin{pmatrix} z & -\overline{w} \\ w & \overline{z} \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} z, w \in \mathbb{C}, \\ |z|^2 + |w|^2 = 1 \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} z & -\overline{w} \\ w & \overline{z} \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} z = \cos\theta_1 + i\cos\theta_2 \sin\theta_1, \\ w = \cos\theta_3 \sin\theta_2 \sin\theta_1 + i \sin\theta_3 \sin\theta_2 \sin\theta_1, \\ 0 \le \theta_1 \le \pi, 0 \le \theta_2 \le \pi, \\ 0 \le \theta_3 \le 2\pi \end{array} \right\}\end{aligned}$$

証明. (1) については省略する.

(2) $SU(2)$ の任意の元 g を

$$g = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} \in SU(2)$$

と表示すると，$g^{-1} = g^*, |g| = 1$ より，

$$\begin{pmatrix} z_{22} & z_{12} \\ z_{21} & z_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{z_{11}} & \overline{z_{12}} \\ \overline{z_{21}} & \overline{z_{22}} \end{pmatrix}$$

よって，$z_{22} = \overline{z_{11}}, z_{12} = -\overline{z_{21}}$. ここで，$z := z_{11}, w := z_{21}$ とおくと，

$$g = \begin{pmatrix} z & -\overline{w} \\ w & \overline{z} \end{pmatrix}, \quad |z|^2 + |w|^2 = 1$$

逆に，上の形の g は $SU(2)$ の元になるから，

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} z & -\overline{w} \\ w & \overline{z} \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} z, w \in \mathbb{C}, \\ |z|^2 + |w|^2 = 1 \end{array} \right\}$$

□

問題 4.9. $\mathfrak{su}(n)$ の上記で定めた極大可換部分環 $\mathfrak{t}$ に対し，単位格子 $\Gamma = \{H \in \mathfrak{t} \mid \exp H = e\}$ を求めよ.

解答.

$$\Gamma = \left\{ 2\pi i \begin{pmatrix} m_1 & & \\ & \ddots & \\ & & m_n \end{pmatrix} m_1, \cdots, m_n \in \mathbb{Z}, \sum_{j=1}^{n} m_j = 0 \right\}$$

□

問題 5.1. $(g, y) \in O(n) \ltimes \mathbb{R}^n, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ に対し，

$$d((g, y)x_1, (g, y)x_2) = d(x_1, x_2)$$

が成り立つことを示せ.

証明. d の定義と $g \in O(n)$ より,

$$\begin{aligned}
d((g,y)x_1,(g,y)x_2) &= \|(gx_1+y)-(gx_2+y)\| \qquad (d \text{ の定義}) \\
&= \|g(x_1-x_2)\| = \|x_1-x_2\| \qquad (g \in O(n)) \\
&= d(x_1,x_2) \qquad (d \text{ の定義})
\end{aligned}$$

□

問題 5.2. $x \in \mathbb{R}^n$ に対し,$\mathbb{R}^n$ の変換 s_x を

$$s_x(y) = 2x - y$$

と定め,$\mathbb{R}^n$ の点 x における**点対称**という.

$$F(s_x, \mathbb{R}^n) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid s_x(y) = y\}$$

とおくとき,次を示せ.

(1) $F(s_x, \mathbb{R}^n) = \{x\}$.

(2) $s_x^2 = 1$.

(3) $y, z \in \mathbb{R}^n$ に対し,$d(s_x y, s_x z) = d(y,z)$.

(4) $u \in \mathbb{R}^n$ に対し,$\frac{d}{dt} s_x(x+tu)_{|t=0} = -u$.

証明. (1) $F(s_x, \mathbb{R}^n) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid 2x - y = y\} = \{x\}$.

(2) $y \in \mathbb{R}^n$ に対し,$s_x^2 y = s_x(2x-y) = 2x - (2x-y) = y$.

(3) s_x と d の定義を用いて,

$$\begin{aligned}
d(s_x y, s_x z) &= d(2x-y, 2x-z) \qquad (s_x \text{ の定義}) \\
&= \|(2x-y)-(2x-z)\| \qquad (d \text{ の定義}) \\
&= \|z-y\| = d(y,z) \qquad (d \text{ の定義})
\end{aligned}$$

(4) $s_x(x+tu) = 2x-(x+tu) = x-tu$ だから,$\frac{d}{dt} s_x(x+tu)_{|t=0} = -u$. □

問題 5.3. $x \in S^{n-1} (\subset \mathbb{R}^n)$ に対し,$\mathbb{R}^n$ の変換 s_x を

$$s_x(y) = -y + 2\langle y, x\rangle x$$

と定め,S^{n-1} の x における**点対称**という.

$$F(s_x, S^{n-1}) = \{y \in S^{n-1} \mid s_x(y) = y\}$$

とおくとき,次を示せ.

(1) $s_x \in O(n), s_x^2 = 1$

(2) $s_x(S^{n-1}) = S^{n-1}$

(3) $F(s_x, S^{n-1}) = \{x, -x\}$

証明. (1) s_x は明らかに線形変換である．

$$s_x(y) = \begin{cases} y & (y \in \mathbb{R}x \text{ のとき}), \\ -y & (\langle x, y\rangle = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となるので，$s_x \in O(n), s_x^2 = 1$.

(2) $y \in S^{n-1}$ とする．(1) より，$s_x \in O(n)$ だから，$\|s_x(y)\| = \|y\| = 1$. ゆえに，$s_x(y) \in S^{n-1}$ となり，$s_x(S^{n-1}) \subset S^{n-1}$．$y = s_x(s_x(y))$ だから，$S^{n-1} \subset s_x(S^{n-1})$．よって，$s_x(S^{n-1}) = S^{n-1}$

(3) $x \in S^{n-1}$ に比例する S^{n-1} の元は $\pm x$ に限られることに注意して，

$$\begin{aligned} F(s_x, S^{n-1}) &= \{y \in S^{n-1} \mid -y + 2\langle y, x\rangle x = y\} \\ &= \{y \in S^{n-1} \mid \langle y, x\rangle x = y\} = \{\pm x\} \end{aligned}$$

□

問題 5.4. $S^{n-1} \to P^{n-1}(\mathbb{R}); u \mapsto \mathbb{R}u$ は $2:1$ の全射になることを示せ.

問題 5.5. $\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ の元の向きを忘れる写像

$$\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n) \to G_k(\mathbb{R}^n); (V, [\{v_1, \cdots, v_k\}]) \mapsto V$$

は $2:1$ の全射になることを示せ.

問題 5.6. $g \in U(n)$ に対して，$\theta(g) = \bar{g}$ とおく．次を示せ.

(1) $g \in U(n)$ に対して，$\theta(g) \in U(n)$.

(2) $g_1, g_2 \in U(n)$ に対して，$\theta(g_1 g_2) = \theta(g_1)\theta(g_2)$.

(3) $\theta^2 = 1$

(4) $O(n) = \{g \in U(n) \mid \theta(g) = g\}$.

証明. (4) $\{g \in U(n) \mid \theta(g) = g\} = U(n) \cap M_n(\mathbb{R}) = O(n)$ □