

# 有限幅周期表面からの波動散乱:理論と仮説

Wave scattering from a periodic surface with finite extent: Theory and hypothesis

中山 純一 Junichi Nakayama  
 田村 安彦 Yasuhiko Tamura

京都工芸繊維大学 (Kyoto Institute of Technology)

## 1 まえがき

平面波が完全周期表面（回折格子）に入射するとき、離散的な方向への回折が発生し、回折波は平面波の和で表現される。一方、有限幅周期表面は連続スペクトルを持つため、全ての方向への散乱が発生し、散乱波は遠方では円筒波になる。このような回折と散乱の架け橋に関する理論と仮説について述べる。

## 2 周期フーリエ変換

周期フーリエ変換 [1] は、不規則関数の  $D^a$  フーリエ変換を簡略化したものであり、周期関数の移動不変性（周期関数は'定数'である）を用いる。まず、 $x$  方向への移動演算子  $D$  を次式で導入する。

$$D^n \psi(x, z) = \psi(x + nL, z), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1)$$

ここで、周期  $L$  は定数である。明らかに、任意の整数  $m, n$  に対して、 $D^0 = 1$ 、 $D^m D^n = D^{m+n}$ 、 $[D^m]^{-1} = D^{-m}$  が成り立つ。そこで周期フーリエ変換を次式で定義する：

$$k_L F(x, s|z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{is(x+mL)} D^m \psi(x, z) \quad (2)$$

$k_L = 2\pi/L$  は周期  $L$  に対応する波数である。(2) より、

$$D^n F(x, s|z) = F(x + nL, s|z) = F(x, s|z) \quad (3)$$

$$k_L e^{-isx} F(x, s|z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{ismL} D^m \psi(x, z) \quad (4)$$

周期フーリエ変換は、任意の関数  $\psi(x, z)$  を周期  $L$  をもつ  $x$  の周期関数  $F(x, s|z)$  に変換することが分かる。また、(4) より、 $e^{-isx} F(x, s|z)$  は  $s$  の周期関数で、周期は  $k_L$  となる。このことから逆変換公式は次式となる。

$$\psi(x, z) = \int_{-k_L/2}^{k_L/2} e^{-isx} F(x, s|z) ds \quad (5)$$

## 3 有限幅周期表面からの散乱

有限幅周期表面による TM 平面波の散乱を考える (図 1)。磁界の  $y$  成分を  $\psi(x, z)$  とすれば、表面  $z = f(x)$  から上の自由空間中でヘルムホルツ方程式を満たし、また、表面上 ( $z = f(x)$ ) でノイマン条件を満たす。

$$[\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial z^2 + k^2] \psi(x, z) = 0 \quad (6)$$

$$\partial \psi(x, z) / \partial n|_{z=f(x)} = 0 \quad (7)$$

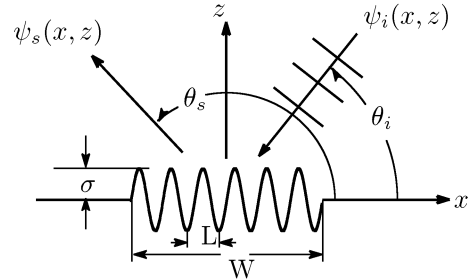


図 1 完全導体有限幅周期表面による TM 平面波の散乱。 $\psi_i(x, z)$  は入射平面波、 $\psi_s(x, z)$  は散乱波、 $\theta_i$  は入射角、 $\theta_s$  は散乱角。 $L$  は周期、 $W$  は有限幅

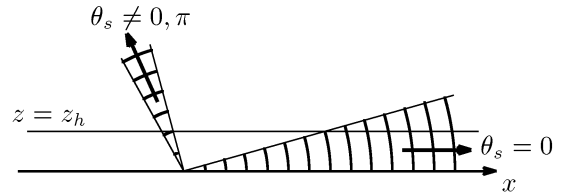


図 2 TM 波の場合、水平方向への回折ビームが存在できる。

ここで、 $k = 2\pi/\lambda$  は波数、 $\lambda$  は波長である。入射平面波  $\psi_i(x, z)$  を

$$\psi_i(x, z) = e^{-ipx - i\beta(p)z}, \quad p = k \cos \theta_i \quad (8)$$

と書く。 $\theta_i$  は入射角である。また、関数  $\beta(p)$  は

$$\beta(p) = \sqrt{k^2 - p^2}, \quad \text{Re}[\beta(p)] \geq 0 \quad \text{Im}[\beta(p)] \geq 0 \quad (9)$$

以下では、標準状態からの変動成分を散乱波であると考え、平坦面 ( $z = 0$ ) からの反射波と入射波の和を標準状態と考え、全波動界を

$$\psi(x, z) = \psi_i(x, z) + e^{-ipx + i\beta(p)z} + \psi_s(x, z) \quad (10)$$

と書く。右辺第 2 項は平坦面から反射波、第 3 項  $\psi_s(x, z)$  が表面凹凸による散乱波を表す。

完全導体の有限幅周期表面による TM 波の散乱問題では、散乱波を角スペクトル  $A_\beta(s)$  を用いて表現する。

$$\psi_s(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A_\beta(s)}{\beta(p+s)} e^{-i(p+s)x + i\beta(p+s)z} ds \quad (11)$$

$$= \sum_m I_m(x, z) \quad (12)$$

$$I_m(x, z) = e^{-i(p+mk_L)x} \int_{-k_L/2}^{k_L/2} \frac{A_\beta(s+mk_L)}{\beta(p+s+mk_L)} \times e^{-isx + i\beta(p+s+mk_L)z} ds \quad (13)$$

$p+s = \pm k$  のとき、スペクトル  $A_\beta(s)/\beta(p+s)$  は発散する。この発散は、物理的なもので、水平方向に散乱される回折ビームが存在するために起きる (図2)。(11) はフーリエ変換による表現であり、これを周期フーリエ変換し逆変換すれば (13) が得られる。 $I_m(x, z)$  を  $m$  次の回折ビームと呼んでいる。連続スペクトルを持つ散乱波を離散次数を持つ回折ビームの和として表現できるので、回折格子の場合との比較が可能となる。

次に、光学定理 (前方散乱定理) は

$$p_c = -\frac{4\pi}{k} \operatorname{Re}[A_\beta(0)] = \sum_m \Phi_m \quad (14)$$

$$\Phi_m = \frac{2\pi}{k} \int_{-k_L/2}^{k_L/2} \operatorname{Re}[\beta(p+s+mk_L)] \times \left| \frac{A_\beta(s+mk_L)}{\beta(p+s+mk_L)} \right|^2 ds \quad (15)$$

と書ける。 $\Phi_m$  は  $m$  次の回折ビームによる散乱断面積である。全散乱断面積  $p_c$  が鏡面反射方向の散乱振幅の減少分に比例することを (14) は表している。この関係式は、回折と散乱の架け橋となりうる。

#### 4 回折格子 (完全周期表面) の場合

有限幅周期表面の幅  $W$  を無限に広げれば、回折格子になる。そのような周期表面による回折においては、周期性のため、波動界はフロケの形に書ける。ここでは、標準状態からのズレを回折波と見なして、

$$\psi(x, z) = \psi_i(x, z) + e^{-ipx+i\beta(p)z} + \psi_D(x, z) \quad (16)$$

$$\psi_D(x, z) = \sum_m D_m e^{-i(p+mk_L)x+i\beta(p+mk_L)z} \quad (17)$$

と表現する。周期格子による回折問題は、無限個の散乱体による散乱問題であるが、構造の周期性により 1 個 (1 周期) の散乱体による散乱問題に帰着できる。これがフロケの解の意義である。

周期格子の場合、光学定理 (前方散乱定理) は

$$p_c^{(g)} = -2\frac{\beta(p)}{k} \operatorname{Re}[D_0] = \sum_m \frac{\operatorname{Re}[\beta(p+mk_L)]}{k} |D_m|^2 \quad (18)$$

となる。ここで、 $p_c^{(g)}$  は単位長さあたりの全散乱断面積であるが、 $p_c$  と区別するため全回折断面積と呼ぶ。

低入射角の極限  $\theta_i \rightarrow 0$ 、では、回折が発生せず反射係数  $-1$  をもつ反射波だけになる ( $D_0$  が  $-2$  に、 $D_m (m \neq 0)$  は  $0$  になる)。このため、次式が成り立つ。

$$p_c^{(g)} = 4 \sin \theta_i, \quad (\theta_i \rightarrow 0) \quad (19)$$

#### 5 仮説

$W \rightarrow \infty$  の極限では、有限幅周期表面は完全周期表面になる。そこで、十分大きな  $W$  に対して、以下の仮説の成立が期待できる。

**(断面積仮説)** 単位長さあたりの全散乱断面積が全回折断面積  $p_c^{(g)}$  と等しい。

$$p_c/W \approx p_c^{(g)} \quad (20)$$

これは、 $p_c$  が  $W$  に比例することを表し、低入射角 ( $\theta_i \rightarrow 0$ ) では成立しない。

**(相対電力仮説)** 全散乱断面積  $p_c$  に占める  $m$  次回折ビーム散乱断面積  $\Phi_m$ 、の割合が全回折断面積  $p_c^{(g)}$  に占める  $m$  次回折電力の割合に等しい。

$$\frac{\Phi_m}{p_c} \approx \frac{1}{p_c^{(g)}} \frac{\operatorname{Re}[\beta(p+mk_L)]}{k} |D_m|^2 \quad (21)$$

これも低入射角では成立しない。

**( $\sqrt{W/\lambda}$  仮説)** 低入射角極限 ( $\theta_i \rightarrow 0$ ) においては、全散乱断面積  $p_c$  は  $\sqrt{W/\lambda}$  に比例する。

#### 6 Undersampling 近似と摂動解

正弦波状の有限幅周期表面の場合を考える。

$$z = f(x) = \begin{cases} \sigma \sin(k_L x), & |x| \leq W/2 \\ 0, & |x| > W/2 \end{cases} \quad (22)$$

ここで、 $\sigma$  は表面荒さを表す。幅  $W$  が十分広い場合に適用出来る数値解法・解析解法がない。このため、物理的な近似解法として、Undersampling 近似を導入した。この近似を用いて、全散乱断面積を推定すると [2]、低入射角の極限 ( $\theta_i \rightarrow 0$ ) で

$$\frac{p_c}{\lambda} = \frac{2}{c_f} \sqrt{\frac{W}{\lambda}}, \quad (W \rightarrow \infty). \quad (23)$$

となる。ただし、 $c_f \approx 0.942$ 。この右辺は  $\sqrt{W/\lambda}$  に比例するが、周期  $L$  と荒さ  $\sigma$  には無関係である。一方、 $W$  も狭く荒さ  $\sigma$  も小さい場合、2 次摂動量として全散乱断面積を評価すれば、 $|k - k_L| < k$  の条件下で

$$\frac{p_c^{(2)}}{\lambda} \approx \frac{W}{\lambda} \left( \frac{2\pi\sigma}{L} \right)^2 \frac{k}{\beta(k - k_L)}, \quad (\theta_i \rightarrow 0) \quad (24)$$

となる。右辺は  $W$  に比例し、勾配パラメータ  $\sigma/L$  に依存する。幅  $W$  が狭く単一散乱が主体である場合には、全散乱断面積が  $W$  に依存する。 $W$  が広く多重散乱が主体となる場合には、全散乱断面積が  $\sqrt{W/\lambda}$  に比例すると考えられる。

#### 7 まとめ

不完全周期構造のスペクトル理論としての周期フーリエ変換について述べ、また、回折格子理論と有限幅周期表面からの散乱をつなぐ概念としての光学定理 (前方散乱定理) について述べた。数値計算例は、低入射角を除いて断面積仮説と相対電力仮説が精度良く成り立ち、実用的であることを示唆している。しかし、理論的根拠は明白ではない。また、 $\sqrt{W/\lambda}$  仮説を数値計算で検証することは困難である。今後、 $W/\lambda \gg 10^4$  の場合を取り扱える実用的で高精度な数値解法が研究されることを期待したい。

**文献:** [1] Nakayama, IEICE Trans. Vol. E83-C, pp.481-487 (2000). [2] Nakayama and Tamura, IEICE Trans. Vol. E91-C, pp.56-63 (2008)