セグメント安定性概念に基づく
制御システムのロバスト安定解析・設計法

松田　忠典

京都工芸繊維大学

目 次

第1章　緒言

制御システムが安定であることは非常に重要である。システムの安定解析をする際にはシステムを数式モデルで表現して行うことがふつうであるが，実際のシステムと数式モデルとの間に誤差が含まれることがしばしばある。このため，数式モデルに不確かさが含まれると仮定して安定解析を行う必要がある。このような安定解析は「ロバスト安定解析」と呼ばれ，その研究は近年活発に行われている。

特性多項式に不確かさが含まれる線形時不変システムの特性表現として，多項式ポリトープと呼ばれるものがある。多項式ポリトープとは有限個の端点多項式の凸包に相当する多項式であり，様々な係数変動のタイプを包摂している。例えば，多項式係数間の関係が独立な区間多項式や，係数変動の形態として係数空間において l_1-ノルムを用いたダイヤモンド多項式，あるいは，アフィン線形な不確かさを含む多項式などはいずれも多項式ポリトープの一種である [3, 14]。

係数空間において多項式ポリトープの安定性がその端点多項式の安定性に帰着されるとき，端点結果が成立するという。一般には多項式ポリトープの D 安定性は端点結果が成立せず，無限個の多項式の安定性を判定する必要があるため安定判別は非常に困難となる。ここで，D 安定とは複素平面上の指定した実軸対称な連結開領域に特性多項式の零点がすべて含まれていることを指す。しかしながら，多項式ポリトープの D 安定性はエッジ定理 [1] によりその露出エッジに相当するセグメント多項式の D 安定性に帰着される。このことより，セグメント多項式の安定判別の重要性が浮き彫りとなり，以来セグメント多項式を安定判別する方法についての研究が盛んに行われた。セグメント多項式の Hurwitz 安定性判定法 [23] や Schur 安定性判定法 [8] などがその成果である。

しかしながら，これら基本的な安定性の性質以外にも，解明すべき D 安定性のクラスがある。その代表的な例として，デルタ演算子安定性や，減衰度を考慮した Shifted-Hurwitz 安定性がある。ここで，デルタ演算子とは離散時間システムを表現するための演算子であり，連続時間表現と統一した議論ができることや，数値計算上の利点があることから近年注目されている演算子である [12, 19]。ダイヤモンド多項式や区間多項式といった，多項式ポリトープのうち特別な形の多項式のデルタ演算子安定性や Shifted-Hurwitz 安定性については，方向付き安定半径を用いる方法が提案されているが [9, 20, 32]，一般的な多項式ポリトープの安定性に

ついては未解決の課題として残っている。

また，セグメント多項式の安定判別のみならず，ロバスト安定なシステム設計のために，セグメント多項式が安定であるような範囲，あるいはセグメント多項式の方向を係数空間でさらに延長していっても安定性が保たれるか，といった「係数空間上の直線が安定であるための変動範囲」を求めることがしばしば要求される。

さらに，線形時不変システムのみならず，非線形システムのひとつであるルーリエ系についても，不確かさを考慮したロバスト安定性を判定することが求められる。これについては，線形部伝達関数に区間型の不確かさを含む連続時間ルーリエ系に限り，ポポフの定理を用いた結果が得られているが [10, 17, 26] ，離散時間ルーリエ系や，アフィン線形な不確かさを含むルーリエ系に対しても安定性を判定することが要求されている。

以上で述べたように，システムの様々な形式の不確かさを表現することができる多項式ポリトープを安定判別できるか否かはセグメント多項式の安定判別の可否が非常に重要となるが，これに関連する問題が未解決のまま多く残されている。このような諸問題を解決するには，セグメント多項式の安定性をより一般的に，より詳しく考察する必要があると考えられる。そこで本論文では，セグメントの安定性概念に基づいた制御システムのロバスト安定解析・設計法の提案を行う。具体的には，デルタ演算子多項式ポリトープの安定判別法および多項式ポリトープの Shifted-Hurwitz 安定性の判定法の提案を行う。さらに，係数空間上の直線が安定であるための範囲を求めることを考える。このためのツールとして Stability Feeler の提案を行う。このツールにより，ロバスト安定なシステム設計が可能となる他，線形部伝達関数にアフィン線形な不確かさを含む連続時間および離散時間ルーリエ系のロバスト絶対安定解析にも応用できることを示す。

論文の構成は以下のとおりである。2 章では，上記で触れた先行研究についてより具体的に述べ，本論文で取り扱う解決すべき問題を明らかにする。3 章では，多項式ポリトープのデルタ演算子安定性判別法と Shifted-Hurwitz 安定性判別法を提案する。4 章では Stability Feeler の提案を行い，その計算法やロバストシステム設計への応用例について述べる。5 章では，Stability Feeler を用いたルーリエ系のロバスト安定解析評価について述べる。6 章はまとめである。

第2章　研究の背景

本章ではロバスト安定性についての先行研究を紹介するとともに，本論文で取り扱う，解決すべき問題を明らかにする。

2.1　先行研究紹介

不確かさが含まれる線形時不変システムの特性表現として，多項式ポリトープがある。これは，以下のように表される。

$$\mathcal{P}(s) \;=\; \left\{ p(s) \,\middle|\, p(s) = \sum_{i=1}^{l} \mu_i p^i(s),\ \sum_{i=1}^{l} \mu_i = 1,\ \mu_i \geq 0, i = 1, \cdots, l \right\} \quad (2.1)$$

ここで，$p^i(s),\ i = 1, \cdots, l$ はそれぞれ n 次の実多項式であり，これらを端点多項式と呼ぶ。任意の μ_i の組み合わせで (2.1) 式が D 安定であるとき，多項式ポリトープは D 安定であるという。ここで，D 安定とは複素平面上の指定した実軸対称な連結開領域 $\mathcal{D}$ に特性多項式の零点がすべて含まれていることを指す。ラプラス演算子区間多項式など，多項式ポリトープの中には安定性がその端点多項式の安定性に帰着される，いわゆる端点結果が成立するものも存在するが，一般に，多項式ポリトープの D 安定性については端点結果は成立しない。しかしながら，多項式ポリトープの D 安定性はエッジ定理 [1] によりその露出エッジに相当するセグメント多項式の D 安定性に帰着される。領域 $\mathcal{D}$ を複素左半平面としたセグメント多項式の Hurwitz 安定性の判定法として，以下のようなものがある。

補題 1 [8, 23] （固有値計算によるセグメント多項式の Hurwitz 安定性判定法）
n 次多項式 $h^{m_1}(s)$ と $h^{m_2}(s)$ の最高次係数が共に正であるとき，セグメント多項式 $h^{m_1,m_2}(s) = (1-\nu)h^{m_1}(s) + \nu h^{m_2}(s),\ \nu \in [0, 1]$ が Hurwitz 安定であるための必要十分条件は，$h^{m_1}(s)$ と $h^{m_2}(s)$ が Hurwitz 安定でかつ行列 $H(\boldsymbol{h}^{m_1})H(\boldsymbol{h}^{m_2})^{-1}$ が区間

$(-\infty, 0)$ に固有値を持たないことである。ただし，

$$
\begin{aligned}
H(\boldsymbol{h}) &= \begin{bmatrix} h_{n-1} & h_{n-3} & & 0 & 0 \\ h_n & h_{n-2} & & & \vdots \\ 0 & h_{n-1} & \ddots & h_1 & 0 \\ \vdots & h_n & & h_2 & h_0 \\ 0 & & & h_3 & h_1 \end{bmatrix} \quad (2.2) \\
\boldsymbol{h} &= [h_0, h_1, \cdots, h_n]^T \in \Re^{n+1} \quad (2.3)
\end{aligned}
$$

である。また，$\boldsymbol{h}^{m_1} = [h_0^{m_1}, h_1^{m_1}, \cdots, h_n^{m_1}]^T \in \Re^{n+1}$，$\boldsymbol{h}^{m_2} = [h_0^{m_2}, h_1^{m_2}, \cdots, h_n^{m_2}]^T \in \Re^{n+1}$ はそれぞれ $h^{m_1}(s) = \sum_{i=0}^n h_i^{m_1} s^i$, $h^{m_2}(s) = \sum_{i=0}^n h_i^{m_2} s^i$ の係数ベクトルである。

補題 2 [23]（値集合の概念を用いたセグメント多項式の Hurwitz 安定性判定法）

n 次多項式 $h^{m_1}(s)$ と $h^{m_2}(s)$ の最高次係数が共に正であるとき，セグメント多項式 $h^{m_1,m_2}(s) = (1-\nu)h^{m_1}(s) + \nu h^{m_2}(s)$, $\nu \in [0,1]$ が Hurwitz 安定であるための必要十分条件は，$h^{m_1}(s)$ が Hurwitz 安定でかつ

$$h_e^{m_1}(\omega)h_o^{m_2}(\omega) - h_e^{m_2}(\omega)h_o^{m_1}(\omega) = 0 \quad (2.4)$$

$$h_e^{m_1}(\omega)h_e^{m_2}(\omega) \leq 0 \quad (2.5)$$

$$h_o^{m_1}(\omega)h_o^{m_2}(\omega) \leq 0 \quad (2.6)$$

をすべて満たす $\omega \geq 0$ が存在しないことである。ただし，$h_e^{m_1}(\omega)$, $h_e^{m_2}(\omega)$ はそれぞれ $h^{m_1}(j\omega)$, $h^{m_2}(j\omega)$ の実部，$h_o^{m_1}(\omega)$, $h_o^{m_2}(\omega)$ はそれらの虚部である。また，$j = \sqrt{-1}$ である。

また，セグメント多項式の Schur 安定性判定法として，以下のようなものがある。Schur 安定とは，領域 $\mathcal{D}$ を複素単位円内としたときの D 安定のことである。

補題 3 [8]（固有値計算によるセグメント多項式の Schur 安定性判定法）　n 次多項式 $g^{m_1}(z)$ と $g^{m_2}(z)$ の最高次係数が共に正であるとき，セグメント多項式 $g^{m_1,m_2}(z) = (1-\nu)g^{m_1}(z) + \nu g^{m_2}(z)$, $\nu \in [0,1]$ が Schur 安定であるための必要十分条件は，$g^{m_1}(z)$ と $g^{m_2}(z)$ が Schur 安定でかつ行列 $S(\boldsymbol{g}^{m_1})S(\boldsymbol{g}^{m_2})^{-1}$ が実数区間 $(-\infty, 0)$ に固有値を持たないことである。ただし，

$$
\begin{aligned}
S(\boldsymbol{g}) &= \begin{bmatrix} g_n & g_{n-1} & \cdots & g_3 & g_2 - g_0 \\ 0 & g_n & \cdots & g_4 - g_0 & g_3 - g_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & -g_0 & \cdots & g_n - g_{n-4} & g_{n-1} - g_{n-3} \\ -g_0 & -g_1 & \cdots & -g_{n-3} & g_n - g_{n-2} \end{bmatrix} \quad (2.7) \\
\boldsymbol{g} &= [g_0, g_1, \cdots, g_n]^T \in \Re^{n+1} \quad (2.8)
\end{aligned}
$$

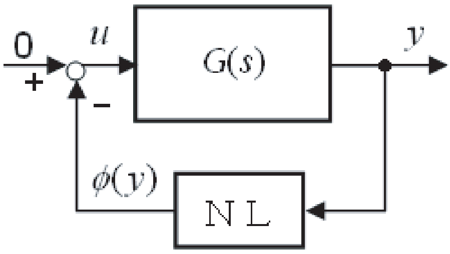

図 2.1: A Lur'e system

である。また，$\boldsymbol{g}^{m_1} = [g_0^{m_1}, g_1^{m_1}, \cdots, g_n^{m_1}]^T \in \Re^{n+1}$, $\boldsymbol{g}^{m_2} = [g_0^{m_2}, g_1^{m_2}, \cdots, g_n^{m_2}]^T \in \Re^{n+1}$ はそれぞれ $g^{m_1}(z) = \sum_{i=0}^{n} g_i^{m_1} z^i$，$g^{m_2}(z) = \sum_{i=0}^{n} g_i^{m_2} z^i$ の係数ベクトルである。

文献 [8] では $g^{m_1}(z)$，$g^{m_2}(z)$ をモニック多項式としているが，上の補題のように $g^{m_1}(z)$，$g^{m_2}(z)$ を最高次係数が常に正であるような多項式としてもよい。この場合も，文献 [8] に掲載されている証明と同じ方法で証明される。

これらの補題より，多項式ポリトープの露出エッジに相当するセグメント多項式の Hurwitz 安定性，Schur 安定性が調べられ，よって多項式ポリトープの Hurwitz 安定判別，Schur 安定判別を行うことができる。

また，ロバスト安定解析ツールとして，方向付き安定半径と呼ばれるものも提案されている。このツールにより不確かさが含まれる線形時不変システムの Hurwitz 安定性や Schur 安定性のみならず，より一般的に，領域 D をその境界が一助変数で表されるような任意の実軸対称開領域にとった D 安定性を調べることができる。不確かさの形式としては，多項式ポリトープの一種である区間多項式やダイヤモンド多項式の D 安定性を調べる方法が提案されている。方向付き安定半径を用いる場合は，セグメント多項式の D 安定性を一つづつ調べるのではなく，係数空間において D 安定であるような範囲を求め，その範囲内にセグメント多項式が含まれるかどうかを調べる方法であり，一度に複数個のセグメント多項式の D 安定性を調べることができる。詳細については，文献 [9, 20, 32] を参照されたい。

また，線形時不変システムのみならず，非線形システムのひとつであるルーリエ系についてもロバスト安定性の判定を行うことが求められる。ルーリエ系は，図 2.1 のような動的な時不変線形部と静的な非線形部からなる閉ループ系であり，非線形フィードバック系のうちで最も基本的なシステムと考えられている。ここで，

$$G(s) = \frac{q_1(s)}{q_0(s)} \tag{2.9}$$

はプロパーな線形部伝達関数，NL はその出力が $\phi(y)$ で表される静的な非線形要素である。k を非負実数とするとき，以下のセクタ条件と呼ばれる式

$$0 \leq \frac{\phi(y)}{y} \leq k, \quad \phi(0) = 0 \tag{2.10}$$

を満たす任意の非線形関数 $\phi(y)$ に対してルーリエ系が大域的に安定であるとき，系はセクタ $[0, k]$ で絶対安定であるという。

ルーリエ系の絶対安定性の研究については，優に半世紀に及ぶ歴史がある [22, 27]。しかしながら，ほとんどの研究において線形部 $G(s)$ に不確かさ含むことを想定しておらず，これを含む問題はごく最近なって研究され始めてきた。不確かさを含むルーリエ系の安定解析に関する近年の先行研究として，文献 [10, 17, 26] などがある。これらの文献では，$q_1(s)$ と $q_0(s)$ の各係数に区間型の不確かさを含む連続時間ルーリエ系が絶対安定であるための十分条件を導いている。

2.2　未解決の問題

前節で述べたように，多項式ポリトープの Hurwitz 安定性や Schur 安定性の判定については，行列の固有値あるいは値集合の概念を用いてセグメント多項式を一つづつ安定判別する方法がある。また，方向付き安定半径を用いれば Hurwitz 安定性や Schur 安定性に限らず，より一般的な D 安定性を調べることができるが，安定判別可能な不確かさの種類については，区間多項式やダイヤモンド多項式に限られている。したがって，多項式ポリトープの D 安定判別については，区間多項式やダイヤモンド多項式を除いて未解決のままである。とくに，近年注目されているデルタ演算子安定性 [12, 19] や減衰度を考慮した Shifted-Hurwitz 安定性については容易に安定判別が行われることが要求されている。

さらに，不確かさを含む線形時不変システムを設計する際には，係数空間上で線分で表されるセグメント多項式を安定判別するだけでなく，係数空間上の直線が安定であるための範囲を求めることも要求される。

また，ルーリエ系のロバスト安定解析についても，線形部に含まれる不確かさが区間型なもののみ，あるいは連続時間のものに限らず，より一般的なアフィン線形な不確かさを含むもの，あるいは線形部が z 演算子あるいはデルタ演算子などで表現される離散時間ルーリエ系の絶対安定性を調べることも要求される。

本論文では，これら未解決の問題を解決することを試みる。多項式ポリトープのデルタ演算子安定性および Shifted-Hurwitz 安定性については，安定性が等価なラプラス演算子多項式ポリトープあるいは z 演算子多項式ポリトープを利用することにより解決を図る。また，方向付き安定半径を区間多項式やダイヤモンド多

項式に限らず，一般的な多項式ポリトープの D 安定性に拡張することも考える。係数空間上の直線が安定であるための範囲については，多項式の零点は係数変動に関して連続であるという性質に着目し，係数空間における安定境界と直線との交点を求めることにより求めることを考えた。この機構を，昆虫の触角に見立てて Stability Feeler と名付けた。さらに，この Stability Feeler を用いてアフィン線形な不確かさを含むルーリエ系が絶対安定であるためのセクタゲインの導出方法を検討した。

第3章　デルタ演算子多項式ポリトープの安定解析

本章では，デルタ演算子で表される多項式ポリトープの安定判別法について述べる。また，多項式ポリトープのShifted-Hurwitz安定性判別法についても触れる。

まず，多項式ポリトープの安定性はエッジ定理 [1] よりその露出エッジに相当するセグメント多項式の安定性に帰着されることに着目し，セグメント多項式を一つづつ安定判別する方法を導く。具体的には，行列の固有値を用いる安定判別法と値集合の概念を用いる安定判別法である。次に，これらとは別に，既に区間多項式やダイヤモンド多項式の安定判別法として提案されている方向付き安定半径を用いる方法 [9, 20, 32] を一般的な多項式ポリトープに対しても適用できるよう拡張する。これは，方向付き安定半径を計算することによって係数空間上で D 安定な範囲をある程度知ることができ，その範囲にセグメント多項式が含まれているかどうかを調べる方法である。よって，両者ともセグメント安定性概念に基づく安定判別法であるといえるが，これらの方法の特徴や，もっとも効率的に安定判別できる方法は何であるかについても述べる。

3.1　デルタ演算子および多項式ポリトープの定義

デルタ演算子 ε は z 演算子またはラプラス演算子 s とサンプリング周期 $T(>0)$ を用いて次のように定義される離散時間システムを表現するための演算子である [12, 19]。

$$\varepsilon = \frac{z-1}{T} = \frac{e^{sT}-1}{T} \tag{3.1}$$

この演算子で表現された特性多項式の複素平面における安定領域 $\mathcal{D}$ は

$$\mathcal{D} \;\; = \;\; \left\{ x+jy \;\middle|\; x, y \in \Re, \left(x+\frac{1}{T}\right)^2 + y^2 < \left(\frac{1}{T}\right)^2 \right\} \tag{3.2}$$

と表される。また, デルタ演算子多項式ポリトープ $\mathcal{P}(\varepsilon)$ は有限個の端点多項式の凸包として定義され，数式で表すと次のようになる。

$$\mathcal{P}(\varepsilon) \;=\; \left\{ p(\varepsilon) \;\middle|\; p(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{l} \mu_i p^i(\varepsilon),\; \sum_{i=1}^{l} \mu_i = 1,\; \mu_i \geq 0, i = 1, \cdots, l \right\} \quad (3.3)$$

ただし，$p^1(\varepsilon), p^2(\varepsilon), \cdots, p^l(\varepsilon)$ は n 次の実多項式であり，これらを端点多項式と呼ぶ。任意の μ_i の組み合わせで (3.3) 式の零点がすべて (3.2) 式の安定領域内に存在するときデルタ演算子多項式ポリトープ $\mathcal{P}(\varepsilon)$ は安定であるという。ここで，符号の異なる係数が存在するとき $\mathcal{P}(\varepsilon)$ は必ず不安定となることが知られているので [31] ，本章を通じて次のような仮定を置く。

仮定 1 端点多項式 $p^1(\varepsilon), p^2(\varepsilon), \cdots, p^l(\varepsilon)$ の係数はすべて正であり，したがって $\mathcal{P}(\varepsilon)$ の次数の低下は起こらない。

この仮定は $\mathcal{P}(\varepsilon)$ が安定であるための必要条件であり，一瞥して正否を知ることができる。

3.2　安定判別法

デルタ演算子多項式ポリトープの安定性は一般にその端点多項式の安定性には帰着されないが [21]，エッジ定理 [1] によりその露出エッジに相当するセグメント多項式の安定性に帰着される。3.2.1 節ではまずデルタ演算子セグメント多項式を一つづつ安定判別する方法について述べ，さらに Shifted-Hurwitz 安定性の判定法についても触れる。3.2.2 節では，方向付き安定半径を用いてセグメント多項式を安定判別する方法について述べる。

3.2.1　セグメント多項式の安定判別による安定判別法

(3.3) 式で表されるデルタ演算子多項式ポリトープ $\mathcal{P}(\varepsilon)$ の l 個の端点多項式 $p^i(\varepsilon) = p_0^i + p_1^i\varepsilon + \cdots + p_n^i\varepsilon^n,\ i = 1, \cdots, l$ の係数ベクトルを $\boldsymbol{p}^i = [p_0^i, p_1^i, \cdots, p_n^i]^T \in \Re^{n+1},\ i = 1, \cdots, l$ とする。エッジ定理 [1] よりデルタ演算子多項式ポリトープを安定判別するにはその露出エッジに相当するデルタ演算子セグメント多項式を安定判別すればよい。端点 $\boldsymbol{p}^{m_1}$ と端点 $\boldsymbol{p}^{m_2}$ を結ぶ線分に相当するデルタ演算子セグメント多項式 $p^{m_1,m_2}(\varepsilon)$ は次のように表される。

$$p^{m_1,m_2}(\varepsilon) = (1-\nu)p^{m_1}(\varepsilon) + \nu p^{m_2}(\varepsilon),\ \nu \in [0, 1] \quad (3.4)$$

$\boldsymbol{p}^{m_1}$ と $\boldsymbol{p}^{m_2}$ を結ぶ線分が露出エッジである場合は, このデルタ演算子セグメント多項式を安定判別する必要がある。ここで，デルタ演算子セグメント多項式 $p^{m_1,m_2}(\varepsilon)$ と安定性が等価な z 演算子多項式を $g^{m_1,m_2}(z)$ とすると，デルタ演算子の定義より $g^{m_1,m_2}(z)$ は

$$\begin{aligned} g^{m_1,m_2}(z) &= p^{m_1,m_2}(\varepsilon)\big|_{\varepsilon=\frac{z-1}{T}} \\ &= (1-\nu)p^{m_1}(\varepsilon)\big|_{\varepsilon=\frac{z-1}{T}} + \nu p^{m_2}(\varepsilon)\big|_{\varepsilon=\frac{z-1}{T}},\ \nu \in [0,1] \end{aligned} \tag{3.5}$$

となるため，$g^{m_1,m_2}(z)$ は $p^{m_1}(\varepsilon)$ および $p^{m_2}(\varepsilon)$ と安定性が等価な z 演算子多項式を端点多項式とする z 演算子セグメント多項式となる。端点 $\boldsymbol{p}^{m_1}$ に対応する多項式 $p^{m_1}(\varepsilon)$ と安定性が等価な z 演算子多項式 $g^{m_1}(z) = p^{m_1}(\varepsilon)\big|_{\varepsilon=\frac{z-1}{T}}$ の係数ベクトル $\boldsymbol{g}^{m_1}$ は，文献 [11] より以下のようにして求められる。

$$\boldsymbol{g}^{m_1} = A \cdot C \cdot \boldsymbol{p}^{m_1} \tag{3.6}$$

$$A = \{a_{i,j}\} \in \Re^{(n+1)\times(n+1)} \tag{3.7}$$

$$a_{i,j} = \begin{cases} 0, & i > j \\ 1, & i = j \\ {}_{j-1}\mathrm{C}_{i-1}(-1)^{j-i}, & i < j \end{cases} \tag{3.8}$$

$$C = \mathrm{diag}[1, 1/T, \cdots, 1/T^{n-1}, 1/T^n] \tag{3.9}$$

なお，$g^{m_2}(z)$ の係数ベクトル $\boldsymbol{g}^{m_2}$ についてももちろん同様に求められる。上式より，$g^{m_1}(z)$，$g^{m_2}(z)$ の最高次係数の符号は $p^{m_1}(\varepsilon)$，$p^{m_2}(\varepsilon)$ の最高次係数の符号と等しく，また仮定 1 より $p^i(\varepsilon)$，$i = 1, \cdots, l$ の係数の符号はすべて正であるので，$g^{m_1}(z)$，$g^{m_2}(z)$ の最高次係数の符号は正となり，(3.5) 式の安定判別法として補題 3 を用いることができる。以上より，次の定理が導かれ，デルタ演算子多項式ポリトープ $\mathcal{P}(\varepsilon)$ の安定判別を行列の固有値を調べることにより行うことができる。

定理 1 デルタ演算子多項式ポリトープ $\mathcal{P}(\varepsilon)$ が安定であるための必要十分条件は，任意の露出端点 $\boldsymbol{p}^i$ に対応する端点多項式 $p^i(\varepsilon)$ が安定で，かつ端点 $\boldsymbol{p}^{m_1}$ と $\boldsymbol{p}^{m_2}$ を結ぶ線分が露出エッジになるようなすべての m_1，m_2 の組み合わせに対して行列 $S(\boldsymbol{g}^{m_1})S(\boldsymbol{g}^{m_2})^{-1}$ が実数区間 $(-\infty, 0)$ に固有値を持たないことである。

ここまでデルタ演算子と z 演算子との関係に着目して導いた安定判別法について述べてきたが，デルタ演算子とラプラス演算子の関係に着目すれば異なる形式の安定判別法を導くことができる。デルタ演算子とラプラス演算子の関係について，次のような補題 [16] がある。

補題 4 n 次のデルタ演算子多項式 $p(\varepsilon)$ の定数項が 0 でないとき，$p(\varepsilon)$ の安定性はラプラス演算子多項式 $h(s) = \left(s - \frac{T}{2}\right)^n p\left(\frac{1}{s-T/2}\right)$ の Hurwitz 安定性と等価である。

この補題より，ラプラス演算子多項式 $h^{m_1,m_2}(s)$ を

$$h^{m_1,m_2}(s) = \left(s - \tfrac{T}{2}\right)^n p^{m_1,m_2}\left(\tfrac{1}{s-T/2}\right) \tag{3.10}$$

と定義すると，$h^{m_1,m_2}(s)$ の安定性は $p^{m_1,m_2}(\varepsilon)$ の安定性と等価となる。また，(3.4) 式より

$$\begin{aligned} h^{m_1,m_2}(s) &= \left(s - \tfrac{T}{2}\right)^n p^{m_1,m_2}\left(\tfrac{1}{s-T/2}\right) \\ &= (1-\nu)\left(s - \tfrac{T}{2}\right)^n p^{m_1}\left(\tfrac{1}{s-T/2}\right) + \nu\left(s - \tfrac{T}{2}\right)^n p^{m_2}\left(\tfrac{1}{s-T/2}\right), \\ &\quad \nu \in [0,1] \end{aligned} \tag{3.11}$$

となるため，$h^{m_1,m_2}(s)$ は $p^{m_1}(\varepsilon)$ および $p^{m_2}(\varepsilon)$ と安定性が等価なラプラス演算子多項式を端点多項式とするラプラス演算子セグメント多項式となる。$p^{m_1}(\varepsilon)$ と安定性が等価な多項式 $h^{m_1}(s) = \left(s - \frac{T}{2}\right)^n p^{m_1}\left(\frac{1}{s-T/2}\right)$ の係数ベクトル $\boldsymbol{h}^{m_1}$ は，z 演算子の場合と同様，以下のような行列とベクトルの積によって求めることができる。

$$\boldsymbol{h}^{m_1} = F \cdot \boldsymbol{p}^{m_1}, \tag{3.12}$$

$$F = \{f_{i,j}\} \in \Re^{(n+1)\times(n+1)} \tag{3.13}$$

$$f_{i,j} = \begin{cases} 0, & i+j > n+2 \\ 1, & i+j = n+2 \\ {}_{n+1-j}\mathrm{C}_{i-1}(-\frac{T}{2})^{n+2-i-j}, & i+j < n+2 \end{cases} \tag{3.14}$$

$h^{m_2}(s)$ の係数ベクトル $\boldsymbol{h}^{m_2}$ についても同様である。上式より，$h^{m_1}(s)$，$h^{m_2}(s)$ の最高次係数の符号は $p^{m_1}(\varepsilon)$，$p^{m_2}(\varepsilon)$ の定数項の符号と等しく，また仮定 1 より $p^i(\varepsilon)$，$i = 1,\cdots,l$ の係数の符号はすべて正であるので，$h^{m_1}(s)$，$h^{m_2}(s)$ の最高次係数の符号は正となる。このことと，補題 1 より，以下の定理が導かれ，デルタ演算子多項式ポリトープ $\mathcal{P}(\varepsilon)$ の安定判別が可能となる。

定理 2 デルタ演算子多項式ポリトープ $\mathcal{P}(\varepsilon)$ が安定であるための必要十分条件は，任意の露出端点 $\boldsymbol{p}^i$ に対応する端点多項式 $p^i(\varepsilon)$ が安定で，かつ端点 $\boldsymbol{p}^{m_1}$ と $\boldsymbol{p}^{m_2}$ を結ぶ線分が露出エッジになるようなすべての m_1，m_2 の組み合わせに対して行列 $H(\boldsymbol{h}^{m_1})H(\boldsymbol{h}^{m_2})^{-1}$ が区間 $(-\infty, 0)$ に固有値を持たないことである。

また，補題 2 より，以下の定理が導かれる。

定理 3 デルタ演算子多項式ポリトープ $\mathcal{P}(\varepsilon)$ が安定であるための必要十分条件は，ある露出端点 $\boldsymbol{p}^i$ に対応する端点多項式 $p^i(\varepsilon)$ が安定で，かつ端点 $\boldsymbol{p}^{m_1}$ と $\boldsymbol{p}^{m_2}$ を結ぶ線分が露出エッジになるようなすべての m_1，m_2 の組み合わせに対して

$$h_e^{m_1}(\omega)h_o^{m_2}(\omega) - h_e^{m_2}(\omega)h_o^{m_1}(\omega) = 0 \tag{3.15}$$

$$h_e^{m_1}(\omega)h_e^{m_2}(\omega) \leq 0 \tag{3.16}$$

$$h_o^{m_1}(\omega)h_o^{m_2}(\omega) \leq 0 \tag{3.17}$$

を同時に満たす $\omega \geq 0$ が存在しないことである。

この定理を用いてデルタ演算子多項式ポリトープを安定判別するには，(3.15)–(3.17) 式をすべて満たす $\omega \geq 0$ が存在するかどうかを調べる必要がある。(3.15) 式を満たす $\omega \geq 0$ は高々有限個であり，これを求めることは $(n-1)$ 次多項式の非負の零点を求める問題に帰着されて計算機上で容易に調べることができる。よって，まず (3.15) 式を満たす $\omega \geq 0$ を求め，これらの ω で (3.16), (3.17) 式を満足するものがあるかどうかを調べればよい。

本節で述べた安定判別法はすべて多項式ポリトープの露出エッジに相当するセグメント多項式の安定性を調べる方法であるが，どのエッジが露出しているかを調べる方法についてはまだ考えられていないようである。エッジが露出している，していないにかかわらず，すべてのエッジをチェックすれば安定性を判定することはできるが，露出しているエッジだけを簡単に見つけることができれば安定判別に要する時間を短縮できると考えられる。このことは今後の課題として残っている。

ところで，デルタ演算子多項式の安定性は係数の順序を逆にした多項式の Shifted-Hurwitz 安定性と等価である [16]。よって本節で述べたデルタ演算子多項式ポリトープの安定判別法はすべて，多項式ポリトープの Shifted-Hurwitz 安定性の判別にもそのまま使用することができる。

3.2.2 方向付き安定半径を用いる方法

本節では，前節までの方法と趣を変えて安定性を集合的に保証する方向付き安定半径 [9, 20, 32] を用いて多項式ポリトープの安定判別を行うアプローチについて述べる。この方法では，デルタ演算子安定性や Shifted-Hurwitz 安定性のみならず，複素平面上の任意の実軸対称な連結開領域を安定領域とする D 安定性を調べることができる。多項式ポリトープは任意の演算子 s を用いて (2.1) 式で定義される。

方向付き安定半径は，係数空間上のある点からある方向への係数変動を考えたときの安定境界までの最短距離を表している。多項式ポリトープを安定判別するには，多項式ポリトープの端点を中心に多項式ポリトープが存在する方向への係数変動を考えたときの安定半径を求め，それによってできる方向付き安定超球に多項式ポリトープの露出エッジが含まれているかどうかを調べればよい。

多項式ポリトープのある端点 $\boldsymbol{p}^i$ が安定領域に含まれていると仮定すると，これを中心とする方向付き安定半径 $\rho(\boldsymbol{p}^i)$ は次のように定義できる。

$$\rho(\boldsymbol{p}^i) = \inf_{\boldsymbol{\lambda}} \|P\boldsymbol{\lambda}\|_2 \tag{3.18}$$

$$\text{subject to} \begin{cases} \boldsymbol{p}^i + P\boldsymbol{\lambda} \in B \\ \boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{0} \end{cases} \tag{3.19}$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
P &= [(\boldsymbol{p}^1-\boldsymbol{p}^i)\cdots(\boldsymbol{p}^{j-1}-\boldsymbol{p}^i)\ (\boldsymbol{p}^{j+1}-\boldsymbol{p}^i)\cdots(\boldsymbol{p}^l-\boldsymbol{p}^i)] \\
&\quad \in \Re^{(n+1)\times(l-1)} \qquad (3.20)\\
\boldsymbol{\lambda} &= [\lambda_1\ \lambda_2\cdots\lambda_{l-1}]^T \in \Re^{l-1} \qquad (3.21)
\end{aligned}
$$

である。また，$\|\cdot\|_2$ はユークリッドノルム，B は安定境界上の係数ベクトルの集合である。

この方向付き安定半径は以下のようにして二次計画問題と一次元探索を組み合わせた問題に定式化することができる。実軸上の点 x を零点に持つ係数ベクトルの集合を B_x^r，複素共役の点 $x\pm jy$ を零点に持つ係数ベクトルの集合を $B_{x\pm jy}^c$ とすると，それぞれ

$$
\begin{aligned}
B_x^r &= \{\boldsymbol{b}\mid \boldsymbol{e}_x^T\boldsymbol{b}=0\} \qquad (3.22)\\
B_{x\pm jy}^c &= \{\boldsymbol{b}\mid E_{x\pm jy}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\} \qquad (3.23)
\end{aligned}
$$

と表される。ただし，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{b} &\in \Re^{n+1} \qquad (3.24)\\
\boldsymbol{e}_x &= [1\ \ x\ \ \cdots\ \ x^n]^T \in \Re^{n+1} \qquad (3.25)\\
E_{x\pm jy} &= \begin{bmatrix} e_0 & e_1 & e_2 & \cdots & e_n \\ 0 & e_0 & e_1 & \cdots & e_{n-1}\end{bmatrix} \in \Re^{2\times(n+1)} \qquad (3.26)\\
e_i &= 2xe_{i-1}-(x^2+y^2)e_{i-2},\ i=2,\cdots,n \qquad (3.27)\\
e_0 &= 1,\ e_1 = 2x \qquad (3.28)
\end{aligned}
$$

である [24]。端点 $\boldsymbol{p}^i$ から多項式ポリトープが存在する方向に変動方向を限定したときの B_x^r および $B_{x\pm jy}^c$ までの最短距離 $\rho_x^r(\boldsymbol{p}^i)$ および $\rho_{x\pm jy}^c(\boldsymbol{p}^i)$ は次のような線形制約の二次計画問題に定式化することができる。

$$
\begin{aligned}
\rho_x^r(\boldsymbol{p}^i) &= \inf_{\boldsymbol{\lambda}} \|P\boldsymbol{\lambda}\|_2 \qquad (3.29)\\
&\quad \text{subject to} \begin{cases} \boldsymbol{e}_x^T P\boldsymbol{\lambda} = -\boldsymbol{e}_x^T\boldsymbol{p}^i \\ \boldsymbol{\lambda}\geq\boldsymbol{0}\end{cases} \qquad (3.30)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\rho_{x\pm jy}^c(\boldsymbol{p}^i) &= \inf_{\boldsymbol{\lambda}} \|P\boldsymbol{\lambda}\|_2 \qquad (3.31)\\
&\quad \text{subject to} \begin{cases} E_{x\pm jy}P\boldsymbol{\lambda} = -E_{x\pm jy}\boldsymbol{p}^i \\ \boldsymbol{\lambda}\geq\boldsymbol{0}\end{cases} \qquad (3.32)
\end{aligned}
$$

ここで，複素平面上の安定領域 $\mathcal{D}$ の境界のうち実軸上の点の集合を $\partial\mathcal{D}_r$，複素共役の点の集合を $\partial\mathcal{D}_c$ とすると，$B = B^r_{x\in\partial\mathcal{D}_r} \cup B^c_{x\pm jy\in\partial\mathcal{D}_c}$ であるので，方向付き安定半径 $\rho(\boldsymbol{p}^i)$ は

$$\rho(\boldsymbol{p}^i) = \min\left\{\inf_{x\in\partial\mathcal{D}_r} \rho^r_x(\boldsymbol{p}^i),\ \inf_{x\pm jy\in\partial\mathcal{D}_c} \rho^c_{x\pm jy}(\boldsymbol{p}^i)\right\} \tag{3.33}$$

と表される。安定領域 $\mathcal{D}$ は任意の実軸対称な連結開領域にとることができるが，ここでは一例として (3.2) 式のデルタ演算子安定性領域を考える。この場合，

$$\partial\mathcal{D}_r = \left\{0,\ -\tfrac{2}{T}\right\} \tag{3.34}$$

$$\partial\mathcal{D}_c = \left\{x \pm j\sqrt{-x^2 - \tfrac{2x}{T}} \mid x \in \left(-\tfrac{2}{T}, 0\right)\right\} \tag{3.35}$$

となるので，

$$\rho(\boldsymbol{p}^i) = \min\left\{\rho^r_0(\boldsymbol{p}^i),\ \rho^r_{-2/T}(\boldsymbol{p}^i),\ \inf_{x\in(-2/T,0)} \rho^c_{x\pm j\sqrt{-x^2-2x/T}}(\boldsymbol{p}^i)\right\} \tag{3.36}$$

となる。(3.36) 式で $\rho^c_{x\pm j\sqrt{-x^2-2x/T}}(\boldsymbol{p}^i)$ の最小値を求めるためには一次元探索を行えばよい。以上より，端点 $\boldsymbol{p}^i$ における方向付き安定半径 $\rho(\boldsymbol{p}^i)$ は二次計画問題と一次元探索を組み合わせた問題を解くことにより求めることができる。ここでは，とくにデルタ演算子安定性の場合について述べたが，境界が一助変数によって表現可能な任意の実軸対称な安定領域 $\mathcal{D}$ について同様の式変形ができ，方向付き安定半径を求めることが可能である。実際に要求される安定性のほとんどはこの条件を満たしており，その代表的なものとして Hurwitz 安定性，Schur 安定性，Shifted-Hurwitz 安定性などがある。

以下では，安定領域 $\mathcal{D}$ をデルタ演算子安定領域に限らず，一般的な領域として話を進める。すでに述べたように，多項式ポリトープの D 安定性はその露出エッジに相当するセグメント多項式の安定性に帰着されるので，以下の定理が成り立つ。

定理 4 多項式ポリトープ $\mathcal{P}(s)$ が D 安定であるための十分条件は，端点 $\boldsymbol{p}^{m_1}$ と $\boldsymbol{p}^{m_2}$ を結ぶ線分が露出エッジになるようなすべての m_1，m_2 に対して

$$\rho(\boldsymbol{p}^{m_1}) + \rho(\boldsymbol{p}^{m_2}) > \|\boldsymbol{p}^{m_1} - \boldsymbol{p}^{m_2}\|_2 \tag{3.37}$$

が成立することである。

上式は，両端点を結ぶ線分がそれぞれの方向付き安定超球の和によって覆われていることを示している。

また，係数空間上で多項式ポリトープが占める領域を $\mathcal{P}$，方向付き安定半径 $\rho(\boldsymbol{p}^{m_1})$ より求められる方向付き安定超球を $\mathcal{R}(\boldsymbol{p}^{m_1})$ とすると，$\mathcal{P}$ は多面体，$\mathcal{R}(\boldsymbol{p}^{m_1})$

は $\mathcal{P}$ の頂点 $\boldsymbol{p}^{m_1}$ を中心として方向を $\mathcal{P}$ の内部方向に限定した，超球の一部となる。ここで，$\mathcal{R}(\boldsymbol{p}^{m_1})$ が端点 $\boldsymbol{p}^{m_1}$ から最も遠い $\mathcal{P}$ の端点を含んでいれば $\mathcal{P} \subset \mathcal{R}(\boldsymbol{p}^{m_1})$ が成り立つ。このとき，多項式ポリトープは安定となるので以下の定理が成立する。

定理 5 $\mathcal{P}(s)$ が D 安定であるための十分条件は，

$$\rho(\boldsymbol{p}^{m_1}) > \max_{1 \le m_2 \le l} \|\boldsymbol{p}^{m_2} - \boldsymbol{p}^{m_1}\|_2 \tag{3.38}$$

となる端点 $\boldsymbol{p}^{m_1}$ が存在することである。

よって，システムに大きな安定余裕がある場合はすべての端点で方向付き安定半径を求めなくても安定判別を行うことができる。

一方，方向付き安定超球の表面は安定境界と接しているため，方向付き安定超球 $\mathcal{R}(\boldsymbol{p}^{m_1})$ が領域 $\mathcal{P}$ に含まれているならば多項式ポリトープは不安定となる。よって以下の定理が成り立つ。

定理 6 $\mathcal{P}(s)$ が D 安定であるための必要条件は，

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{p}^{m_1}) \subset \mathcal{P} \tag{3.39}$$

を満たす端点 $\boldsymbol{p}^{m_1}$ が存在しないことである。

方向付き安定半径を用いる安定判別法の場合，3.2.1 節の方法と違って必要十分条件が得られていないため，安定性を判定できない場合があることに注意が必要である。しかしながら，前述のように方向付き安定半径を用いる場合は安定領域 $\mathcal{D}$ を自由に設定することにより，デルタ演算子システムの安定性に限らず境界が一助変数で表されるような任意の実軸対称開領域を安定領域とする D 安定性を調べることができるという長所がある。さらに定理 5 の十分条件，定理 6 の必要条件によれば，いずれかの条件が成り立てば直ちに安定あるいは不安定と判定され，すべての端点で方向付き安定半径を求める必要がなくなる。これも方向付き安定半径を用いる方法の長所である。

3.3　数値例

本節では得られた安定判別法を用いた判定例を示す。

例 1

$$\boldsymbol{p}^1 = [1.0 \ \ 3.0 \ \ 3.0 \ \ 1.0]^T \tag{3.40}$$

$$\boldsymbol{p}^2 = [0.9 \ \ 3.1 \ \ 3.1 \ \ 1.1]^T \tag{3.41}$$

$$\boldsymbol{p}^3 = [1.0 \ \ 2.8 \ \ 3.0 \ \ 1.0]^T \tag{3.42}$$

$$T = 1.0 \times 10^{-2} \tag{3.43}$$

で表されるデルタ演算子多項式ポリトープ $\mathcal{P}(\varepsilon)$ の安定性を調べる。

$p^1(\varepsilon),\ p^2(\varepsilon),\ p^3(\varepsilon)$ の零点はすべて (3.2) 式で表される安定領域内に存在するので，端点多項式はすべて安定となる。さらに，(3.6) 式に従って $\boldsymbol{g}^1,\ \boldsymbol{g}^2,\ \boldsymbol{g}^3$ を求め，行列 $S(\boldsymbol{g}^1)S(\boldsymbol{g}^2)^{-1},\ S(\boldsymbol{g}^1)S(\boldsymbol{g}^3)^{-1},\ S(\boldsymbol{g}^2)S(\boldsymbol{g}^3)^{-1}$ を計算して固有値を求めると，$S(\boldsymbol{g}^1)S(\boldsymbol{g}^2)^{-1}$ の固有値は $0.963\pm j0.0309$，$S(\boldsymbol{g}^1)S(\boldsymbol{g}^3)^{-1}$ の固有値は $1.08,\ 1.00$，$S(\boldsymbol{g}^2)S(\boldsymbol{g}^3)^{-1}$ の固有値は $1.11,\ 1.05$ となり，いずれも区間 $(-\infty, 0)$ に固有値を持たない。よって定理 1 より $\mathcal{P}(\varepsilon)$ は安定であると判定される。

また，(3.12) 式に従って $\boldsymbol{h}^1, \boldsymbol{h}^2, \boldsymbol{h}^3$ を求め，行列 $H(\boldsymbol{h}^1)H(\boldsymbol{h}^2)^{-1}, H(\boldsymbol{h}^1)H(\boldsymbol{h}^3)^{-1}, H(\boldsymbol{h}^2)H(\boldsymbol{h}^3)^{-1}$ を計算して固有値を求めると，それぞれ $S(\boldsymbol{g}^1)S(\boldsymbol{g}^2)^{-1}, S(\boldsymbol{g}^1)S(\boldsymbol{g}^3)^{-1}, S(\boldsymbol{g}^2)S(\boldsymbol{g}^3)^{-1}$ の固有値と一致した。よって定理 2 を用いても $\mathcal{P}(\varepsilon)$ が安定であることが確認できる。

次に，定理 3 を用いて安定判別を行う。$m_1 = 1,\ m_2 = 3$ としたときの (3.15) 式で表される方程式の解を求めると $\omega = 0, \pm 0.0576, \pm 1.73$ となる。ここで，$\omega = 0$ のとき $h_e^1(\omega)h_e^3(\omega) = 0.970 > 0$，$\omega = 0.0576$ のとき $h_e^1(\omega)h_e^3(\omega) = 0.952 > 0$，$\omega = 1.73$ のとき $h_e^1(\omega)h_e^3(\omega) = 58.6 > 0$ となるので $m_1 = 1,\ m_2 = 3$ のとき (3.15)–(3.17) 式をすべて満たす $\omega \geq 0$ は存在しない。$m_1 = 1,\ m_2 = 2$ の場合と $m_1 = 2,\ m_2 = 3$ の場合も同様の方法で (3.15)–(3.17) 式をすべて満たす $\omega \geq 0$ が存在しないことが確認できる。よって $\mathcal{P}(\varepsilon)$ は安定であると判定される。

最後に，方向付き安定半径を用いた安定判別を示す。$\rho^c_{x\pm j\sqrt{-x^2-2x/T}}(\boldsymbol{p}^1)$ は (3.20), (3.26), (3.31), (3.32) 式より次のように表される。

$$\begin{aligned}
&\rho^c_{x\pm j\sqrt{-x^2-2x/T}}(\boldsymbol{p}^1) \\
&\quad = \inf_{\boldsymbol{\lambda}} \left\| \begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ 0.1 & -0.2 \\ 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{\lambda} \right\|_2 \qquad (3.44)\\
&\text{subject to} \\
&\quad \begin{cases} E \begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ 0.1 & -0.2 \\ 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} = -E \begin{bmatrix} 1.0 \\ 3.0 \\ 3.0 \\ 1.0 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{0} \end{cases} \qquad (3.45)\\
&E = \begin{bmatrix} 1 & 2x & 4x^2+200x & 8x^3+800x^2 \\ 0 & 1 & 2x & 4x^2+200x \end{bmatrix} \qquad (3.46)
\end{aligned}$$

さらに $x \in (-2/T, 0)$ における $\rho^c_{x\pm j\sqrt{-x^2-2x/T}}(\boldsymbol{p}^1)$ の最小値を求めると 2.66 となる。また，(3.20), (3.25), (3.29), (3.30) 式より $\rho^r_0(\boldsymbol{p}^1) = 1.73$，$\rho^r_{-2/T}(\boldsymbol{p}^1) = 3.94 \times 10^4$

と計算される。よって (3.36) 式より方向付き安定半径 $\rho(\boldsymbol{p}^1)$ は 1.73 となる。ここで，$\|\boldsymbol{p}^2-\boldsymbol{p}^1\|_2=0.2$, $\|\boldsymbol{p}^3-\boldsymbol{p}^1\|_2=0.2$ なので $\rho(\boldsymbol{p}^1) > \max_{1\le m_2\le 3}\|\boldsymbol{p}^{m_2}-\boldsymbol{p}^1\|_2$ が満たされる。よって定理 5 より $\mathcal{P}(\varepsilon)$ は安定であると判定される。

例 2

$$\boldsymbol{p}^1 = [2.6\ \ 2.6\ \ 2.6\ \ 2.4]^T \tag{3.47}$$
$$\boldsymbol{p}^2 = [2.5\ \ 2.6\ \ 2.6\ \ 2.5]^T \tag{3.48}$$
$$\boldsymbol{p}^3 = [2.5\ \ 2.6\ \ 2.6\ \ 2.3]^T \tag{3.49}$$
$$T = 0.0399 \tag{3.50}$$

で表されるデルタ演算子多項式ポリトープ $\mathcal{P}(\varepsilon)$ の安定性を調べる。ただし，$\boldsymbol{p}^1$ と $\boldsymbol{p}^2$ を結ぶ線分に対応するセグメント多項式は文献 [21] において端点結果が成立しない例として紹介されたものである。

$p^1(\varepsilon), p^2(\varepsilon), p^3(\varepsilon)$ の零点はすべて (3.2) 式で表される安定領域内に存在するので端点多項式はすべて安定となるが，(3.6) 式に従って $\boldsymbol{g}^1, \boldsymbol{g}^2$ を求め行列 $S(\boldsymbol{g}^1)S(\boldsymbol{g}^2)^{-1}$ を作り固有値を計算すると $-5.6,\ -0.24$ となった。よって $S(\boldsymbol{g}^1)S(\boldsymbol{g}^2)^{-1}$ は区間 $(-\infty, 0)$ に固有値を持つので，定理 1 より $\mathcal{P}(\varepsilon)$ は不安定であると判定される。また，例 1 と同様にして $H(\boldsymbol{h}^1)H(\boldsymbol{h}^2)^{-1}$ の固有値を求めると $-5.6,\ -0.24$ となるため，当然定理 2 を用いても $\mathcal{P}(\varepsilon)$ が不安定であることが確認できる。

次に，定理 3 を用いて安定判別する。$m_1=1,\ m_2=2$ のときの (3.15) 式で表される方程式の解を求めると $\omega=0, \pm 0.9841, \pm 0.9968$ となる。さらに $\omega=0.9841$ のとき $h_e^1(\omega)h_e^2(\omega)=-1.379\times 10^{-3}<0$, $h_o^1(\omega)h_o^2(\omega)=-1.408\times 10^{-3}<0$ となり，(3.15)–(3.17) 式をすべて満たす $\omega \ge 0$ が存在するので同様に $\mathcal{P}(\varepsilon)$ は不安定であると判定される。

最後に方向付き安定半径を用いた安定判別を示す。$\inf_{x\in(-2/T,0)} \rho^c_{x\pm j\sqrt{-x^2-2x/T}}(\boldsymbol{p}^1)$ を計算すると 0.0275 となるので，(3.36) 式より $\rho(\boldsymbol{p}^1) \le 0.0275$ となる。ここで，$\boldsymbol{p}^1$ から $\boldsymbol{p}^2$ と $\boldsymbol{p}^3$ を結ぶ線分までのユークリッド距離は 0.1 なので，方向付き安定超球 $\mathcal{R}(\boldsymbol{p}^1)$ は $\boldsymbol{p}^2$ と $\boldsymbol{p}^3$ を結ぶ線分から見て $\boldsymbol{p}^1$ 側の領域のみを含む。したがって $\mathcal{R}(\boldsymbol{p}^1) \subset \mathcal{P}$ が成立し，定理 6 より $\mathcal{P}(\varepsilon)$ は不安定と判定される。

3.4 安定判別法の比較と検討

3.2 節において，いくつかのデルタ演算子多項式ポリトープの安定判別法を提案した。それではどの方法が薦められるであろうか？

多項式を安定判別する際にはより速く安定判別を行えることが望まれる。そこで筆者は行列の固有値を用いた安定判別法と値集合の概念を用いた安定判別法，および方向付き安定半径を用いた安定判別法を用いていくつかの数値例について安定判別を行う際に要する計算時間を計測し，比較した。

デルタ演算子多項式ポリトープの代表的なものにデルタ演算子区間多項式と係数空間において l_1-ノルムを用いたデルタ演算子ダイヤモンド多項式があるが，デルタ演算子区間多項式では端点結果が成立し，セグメント多項式の安定性を調べる必要がないため，計算時間の測定はデルタ演算子ダイヤモンド多項式，つまり

$$\begin{aligned}&\mathcal{P}_d(\varepsilon) = p_0 + p_1\varepsilon + \cdots + p_n\varepsilon^n,\\ &|p_0 - \hat{p}_0| + |p_1 - \hat{p}_1| + \cdots + |p_n - \hat{p}_n| < r\end{aligned} \tag{3.51}$$

の安定判別に対して行った。ここで，$\hat{p}_0$，$\hat{p}_1, \cdots$，$\hat{p}_n$ はノミナル多項式の係数，r は変動半径を表す。この多項式の安定判別に必要となる計算は一般の多項式ポリトープの場合とほとんど同じであるので, ここで述べる結果は一般に多くのデルタ演算子多項式ポリトープに対しても成立すると考えられる。また，行列の固有値を用いた安定判別法には定理 1 と定理 2 の二種類があるが，行う計算はほとんど同じであるので定理 2 の方法に対してのみ数値実験を行った。多項式の次数はたかだか 8 次としたが，実際の制御問題を考える際の手掛かりとしてはこの程度の次数で不足はないと考えられる。なお，行列の固有値計算には LAPACK の DGEEV ルーチンを使用した。値集合の概念を用いる場合，代数方程式の解を求める必要があるが，これはニュートン法を利用した。また，方向付き安定半径を用いる際には二次計画問題を解く必要があるが，これは有効制約法を用いた。使用した計算機の CPU は PentiumIII 1GHz である。

安定判別に要する計算時間を各次でランダムで選んだ 10 個以上の数値例を用いて計測した結果，3.2.1 節の方法では次数が同じであれば計算時間はほとんど同じであったのに対し，方向付き安定半径を用いる場合は数値例によって計算時間が大きく異なる結果となった。これらのうち最大の計算時間（実時間）を表 3.1 に示す。

方向付き安定半径を利用する場合に数値例によって計算時間が大きく異なる原因を調べるため，一次元探索を行っている時の二次計画問題の計算回数を調べた。その結果，数値例によって数百回から数百万回とかなり差があった。したがって数値例によって一次元探索での収束速度に差があり，二次計画問題の計算回数が大きく異なることが計算時間が異なる原因であると考えられる。

また，固有値を用いて安定判別するよりも方向付き安定半径を用いた方が計算時間が速いような数値例も存在したが，固有値を用いれば少なくとも 3 次から 8 次程度のダイヤモンド多項式は確実に十分速く安定判別でき，またこの方法は必要

表 3.1: Comparison of computation time

n	eigenvalue [sec]	value set [sec]	stability radius [sec]
3	less than 0.01	0.16	0.77
4	less than 0.01	0.36	6.59
5	0.01	0.64	9.29
6	0.01	1.07	5.51
7	0.02	1.65	3.05
8	0.03	2.46	4.07

十分条件を調べる方法であるので，この程度の次数ならば行列の固有値を計算する方法が安定判別に最も適した方法であると考えられる。次数 n がさらに大きい場合，いくつかの方法については漸近的な計算量を理論的に求めることも不可能ではないが，実践的には上記のような評価で足りると思われる。

3.5　まとめ

デルタ演算子多項式ポリトープの安定判別法として，行列の固有値を用いる方法，値集合の概念を用いる方法，そして方向付き安定半径を用いる方法を導き，それぞれの方法の得失を比較した。その結果，計算速度に関する限りたかだか 8 次程度の多項式ならば行列の固有値を用いる方法が十分速く安定判別でき，また安定条件も必要十分条件となっているため安定判別に最も適した方法であるという結論を得た。一方，方向付き安定半径を用いる場合の長所として，デルタ演算子システムの安定性だけでなく，より一般的な D 安定性を調べることができるという点などが挙げられる。3.2.1 節で述べたすべての方法は，同節で述べたように Shifted-Hurwitz 安定性の判定にもそのまま使うことができる。

第4章　Stability FeelerによるロバストシステムのD安定解析・設計

2.2 節で述べたように，不確かさを含むシステムの設計の際にはセグメント多項式の安定判別のみならず，係数空間において直線で表される多項式が安定であるような範囲を求めることが要求される。本章では，このような要求に応えることができる安定解析ツールとして提案した Stability Feeler について述べる。

4.1　Stability Feelerの定義と計算法

Stability Feeler とは係数空間上で直線で表される多項式

$$f(s)+ag(s), a\in\Re \tag{4.1}$$

が D 安定であるための a の範囲を求めるツールである。ここで，$f(s)=\sum_{i=0}^{n} f_i s^i$ は n 次の実多項式，$g(s)=\sum_{i=0}^{m} g_i s^i$ は $m(\leq n)$ 次の実多項式であり，f_n，g_m は一般性を失うことなく正であるとする。ただし，本章を通じて以下の仮定をおく。

仮定 2 $n=m$ のときは $a>-f_n/g_n$ の範囲のみを考え，*(4.1)* 式は次数が低下しない。

これは，動的な次元はそれほど変化しないという実践的な状況と，次数低下を扱うには別途の考察が要請されるという技術的な理由から設けられたものである。また，すでに述べたように，D 安定とは複素平面上の指定した実軸対称な連結開領域である安定領域 $\mathcal{D}$ に多項式の零点がすべて含まれていることを指す。ただし，複素平面上の安定領域 $\mathcal{D}$ の境界のうち実軸上の点の集合を $\partial\mathcal{D}_r$，複素共役な点の集合を $\partial\mathcal{D}_c$ とし，本章を通じて次のような仮定を置く。

仮定 3 $\partial\mathcal{D}_r$ は有限個の点の集合である。

実際の制御問題で要求される安定性には，前章までに示したように安定領域が複素左半平面である Hurwitz 安定性，安定領域が複素単位円の内部である Schur 安定性，デルタ演算子安定性 [12, 19] などがあるが，これらはすべて仮定 3 を満たしており，この仮定は Stability Feeler の意義を大きく損ねるものではない。

以下では，Stability Feeler の一般的な計算法について述べる。Stability Feeler を求めるためには，係数空間上の直線 $\boldsymbol{f}+a\boldsymbol{g}$ が安定境界と交わるときの a の値を求める必要がある。ここで，$\boldsymbol{f}=[f_0,\cdots,f_n]^T\in\Re^{n+1}$，$\boldsymbol{g}=[g_0,\cdots,g_m,0,\cdots,0]^T\in\Re^{n+1}$ である。この a の値を求めるため，複素平面上の安定領域 $\mathcal{D}$ の境界を実軸上の点の集合 $\partial\mathcal{D}_r$ と複素共役の点の集合 $\partial\mathcal{D}_c$ に分け，これらの点を零点に持つ係数ベクトルの集合 $B^r_{x\in\partial\mathcal{D}_r}$，$B^c_{x\pm jy\in\partial\mathcal{D}_c}$ を考える。直線 $\boldsymbol{f}+a\boldsymbol{g}$ が安定境界 $B^r_{x\in\partial\mathcal{D}_r}$ および $B^c_{x\pm jy\in\partial\mathcal{D}_c}$ と交わるときの a の値の集合はそれぞれ

$$\{a \mid \boldsymbol{e}_x^T(\boldsymbol{f}+a\boldsymbol{g})=0,\ x\in\partial\mathcal{D}_r\} \tag{4.2}$$

$$\{a \mid E_{x\pm jy}(\boldsymbol{f}+a\boldsymbol{g})=\boldsymbol{0},\ x\pm jy\in\partial\mathcal{D}_c,\ x,y\in\Re\} \tag{4.3}$$

となる。ただし，

$$\boldsymbol{e}_x = [1,x,\cdots,x^n]^T\in\Re^{n+1} \tag{4.4}$$

$$E_{x\pm jy} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{e}^1_{x\pm jy}\\ \boldsymbol{e}^2_{x\pm jy}\end{bmatrix}\in\Re^{2\times(n+1)} \tag{4.5}$$

$$\boldsymbol{e}^1_{x\pm jy} = \begin{bmatrix}e_0 & e_1 & e_2 & \cdots & e_n\end{bmatrix} \tag{4.6}$$

$$\boldsymbol{e}^2_{x\pm jy} = \begin{bmatrix}0 & e_0 & e_1 & \cdots & e_{n-1}\end{bmatrix} \tag{4.7}$$

$$e_i = 2xe_{i-1}-(x^2+y^2)e_{i-2},\ i=2,\cdots,n \tag{4.8}$$

$$e_0 = 1,\ e_1=2x \tag{4.9}$$

である [24]。

まず，(4.2) 式で表される値 a を求める方法について述べる。仮定 3 より $\partial\mathcal{D}_r$ は高々有限個の実数の集合なので，$\boldsymbol{e}_x^T(\boldsymbol{f}+a\boldsymbol{g})=0$ の x にそれらを一つずつ代入して a を計算すればよい。これは以下のように計算できる。

- $\boldsymbol{e}_x^T\boldsymbol{g}\neq 0$ のとき

$$a=-\frac{\boldsymbol{e}_x^T\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{e}_x^T\boldsymbol{g}} \tag{4.10}$$

- $\boldsymbol{e}_x^T\boldsymbol{g}=0$ かつ $\boldsymbol{e}_x^T\boldsymbol{f}\neq 0$ のとき
  $\boldsymbol{e}_x^T(\boldsymbol{f}+a\boldsymbol{g})=0$ を満たす a が存在しない。

- $\boldsymbol{e}_x^T\boldsymbol{g} = \boldsymbol{e}_x^T\boldsymbol{f} = 0$ のとき
  すべての a で $\boldsymbol{e}_x^T(\boldsymbol{f}+a\boldsymbol{g}) = 0$ が満たされる。これは，実数 x が常に (4.1) 式の零点となり，(4.1) 式が安定となるような a が存在しないことを意味する。

次に，(4.3) 式で表される値を求める方法を考える。方程式 $E_{x\pm jy}(\boldsymbol{f}+a\boldsymbol{g}) = \boldsymbol{0}$, $x \pm jy \in \partial\mathcal{D}_c$, $x, y \in \Re$ は以下のような連立方程式と等価である。

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}^1_{x\pm jy}(\boldsymbol{f}+a\boldsymbol{g}) = 0 \\ \boldsymbol{e}^2_{x\pm jy}(\boldsymbol{f}+a\boldsymbol{g}) = 0 \\ x \pm jy \in \partial\mathcal{D}_c,\ x, y \in \Re \end{cases} \tag{4.11}$$

(4.11) 式から，以下のような a を消去した連立方程式が導かれる。

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}^2_{x\pm jy}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{e}^1_{x\pm jy}\boldsymbol{g} - \boldsymbol{e}^1_{x\pm jy}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{e}^2_{x\pm jy}\boldsymbol{g} = 0 \\ x \pm jy \in \partial\mathcal{D}_c,\ x, y \in \Re \end{cases} \tag{4.12}$$

ここで，$\partial\mathcal{D}_c$ が一つのパラメータで表現できないという特殊な場合を除けば，(4.12) 式を満たす x, y を求める問題は一変数の方程式を解く問題に帰着できる。特に，D 安定性として Hurwitz 安定性，Shifted-Hurwitz 安定性，Schur 安定性，デルタ演算子安定性を考える場合は，(4.6)〜(4.9) 式よりいずれも $(n+m-1)$ 次の代数方程式を解く問題に帰着される。これは，計算機上で容易に求めることができる。さらに，(4.12) 式を満たす x, y を $\boldsymbol{e}^1_{x\pm jy}(\boldsymbol{f}+a\boldsymbol{g}) = 0$ または $\boldsymbol{e}^2_{x\pm jy}(\boldsymbol{f}+a\boldsymbol{g}) = 0$ に一つずつ代入すれば (4.3) 式を満たす a が求められる。これは，具体的には以下のようにして求められる。

- $\boldsymbol{e}^1_{x\pm jy}\boldsymbol{g} \neq 0$ かつ $\boldsymbol{e}^2_{x\pm jy}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{e}^2_{x\pm jy}\boldsymbol{g} = 0$ のとき

$$a = -\frac{\boldsymbol{e}^1_{x\pm jy}\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{e}^1_{x\pm jy}\boldsymbol{g}} \tag{4.13}$$

- $\boldsymbol{e}^2_{x\pm jy}\boldsymbol{g} \neq 0$ かつ（$\boldsymbol{e}^1_{x\pm jy}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{e}^1_{x\pm jy}\boldsymbol{g} = 0$ または $\boldsymbol{e}^1_{x\pm jy}\boldsymbol{g} \neq 0$）のとき

$$a = -\frac{\boldsymbol{e}^2_{x\pm jy}\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{e}^2_{x\pm jy}\boldsymbol{g}} \tag{4.14}$$

- （$\boldsymbol{e}^1_{x\pm jy}\boldsymbol{f} \neq 0$ かつ $\boldsymbol{e}^1_{x\pm jy}\boldsymbol{g} = 0$）または（$\boldsymbol{e}^2_{x\pm jy}\boldsymbol{f} \neq 0$ かつ $\boldsymbol{e}^2_{x\pm jy}\boldsymbol{g} = 0$）のとき
  これらの x, y の値で (4.11) 式を満足する a は存在しない。

- $\boldsymbol{e}_{x\pm jy}^1\boldsymbol{g} = \boldsymbol{e}_{x\pm jy}^2\boldsymbol{g} = \boldsymbol{e}_{x\pm jy}^1\boldsymbol{f} = \boldsymbol{e}_{x\pm jy}^2\boldsymbol{f} = 0$ のときすべての a で (4.11) 式が満足される。これは，$x \pm jy$ が常に (4.1) 式の零点となり，(4.1) 式が安定となるような a が存在しないことを意味する。

以上のようにして求めた，直線 $\boldsymbol{f} + a\boldsymbol{g}$ が安定境界と交わるときの a の値の集合を用いて Stability Feeler を求める方法を以下に示す。まず，$\boldsymbol{e}_x^T\boldsymbol{g} = \boldsymbol{e}_x^T\boldsymbol{f} = 0$ なる $x \in \partial\mathcal{D}_r$ または $\boldsymbol{e}_{x\pm jy}^1\boldsymbol{g} = \boldsymbol{e}_{x\pm jy}^2\boldsymbol{g} = \boldsymbol{e}_{x\pm jy}^1\boldsymbol{f} = \boldsymbol{e}_{x\pm jy}^2\boldsymbol{f} = 0$ なる $x \pm jy \in \partial\mathcal{D}_c$ が存在するとき，(4.1) 式が D 安定となるような a は存在しない。また，上記以外の場合は，(4.2), (4.3) 式で表される a の個数は有限個となる。この場合，$n = m$ のとき，すなわち $f(s)$ と $g(s)$ の次数が等しいときは $a_0 = -f_n/g_n$，$n > m$ のときは $a_0 = -\infty$ とし，(4.2), (4.3) 式を満たす a の値のうち a_0 より大きいものすべてを小さい順に $a_1, a_2, \cdots, a_k$ とする。また，$a_{k+1} = +\infty$ とする。このとき，零点の係数に関する連続性から，多項式族 $f(s) + ag(s),\ a_i < a < a_{i+1}$ に属する多項式がすべて安定（不安定）であるための必要十分条件は，これに属する一つの多項式が安定（不安定）であることとなる。すなわち，多項式族 $f(s) + ag(s),\ a_i < a < a_{i+1}$ に属する一つの多項式の安定性を $i = 0$ から k までについて調べれば，(4.1) 式が D 安定であるための a の範囲を求めることができる。代表的な一つの多項式の D 安定性は，既存の代数的方法あるいは実際にその零点を計算することにより調べればよい。

注釈 1 この方法では，$n = m$ のとき $a > -f_n/g_n$ の範囲の安定性しか調べていないことになるが，これは仮定 *2* によるものである。

4.2　多項式ポリトープシステムの D 安定解析・設計

Stability Feeler を用いることにより，多項式の平行ポリトープが安定であるための変動範囲を求めることができる。多項式の平行ポリトープは以下のように記述される多項式族である[1]。

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_p(s) \;=\; & \Big\{\hat{p}(s) + \sum_{i=1}^{l}\alpha_i p_i(s) + Kp_K(s) \mid \\ & \quad \alpha_i \in [-r_i, r_i],\ r_i > 0,\ i = 1, \cdots, l,\ K \in \Re\Big\}\end{aligned} \tag{4.15}$$

$l = 2$ のとき，これを係数空間上で表現した概念図を図 4.1 に示す。本節では，ノ

[1] K の範囲も α_i と同様，有限区間で定義されることが普通であるが，本論文では $\mathcal{P}_p(s)$ が D 安定となるような K の範囲を求めたいため，$K \in \Re$ と表現した。これが所与の K に対する解析のみを主眼とする方法との相違点である。

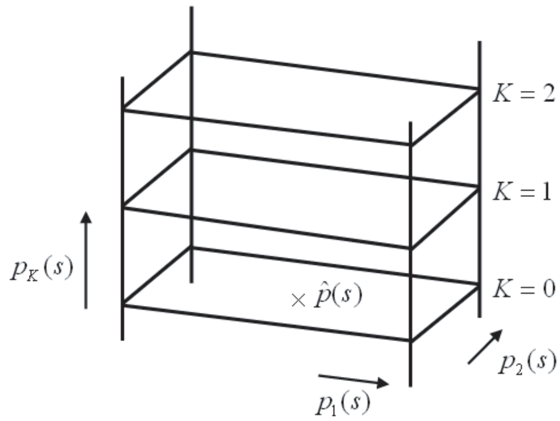

図 4.1: A parallelotope of polynomials

ミナル多項式 $\hat{p}(s)$，方向多項式 $p_i(s), i=0,\cdots,l$ と $p_K(s)$，不確かなパラメータ α_i の変動範囲 $r_i>0, i=1,\cdots,l$ が与えられているとき，$\mathcal{P}_p(s)$ に属する多項式がすべて D 安定となるような K の範囲を求める問題を考える。ただし，以下の仮定をおく。

仮定 4 $K=0$ のとき $\mathcal{P}_p(s)$ に属する多項式は次数が一定で，最高次係数が常に正（すなわち，$\hat{p}(s)$ の最高次係数は正）であるとする。また，$p_K(s)$ の次数は上記の多項式の次数（すなわち，$\hat{p}(s)$ の次数）以下で，最高次係数は正であるとする。

このように記述される問題の典型的な例を紹介する。図 4.2 において，制御器の伝達関数 $C(s)$ と不確かさを含むプラントの伝達関数 $P(s)$ がそれぞれ

$$C(s) = \frac{KC_1(s)}{C_0(s)} \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned} P(s) &= \frac{P_1(s)}{(\hat{\alpha}_1+\alpha_1)+(\hat{\alpha}_2+\alpha_2)s+\cdots+(\hat{\alpha}_l+\alpha_l)s^{l-1}}, \\ &\quad \alpha_i \in [-r_i, r_i],\ i=1,\cdots,l \end{aligned} \tag{4.17}$$

で表されるとする。このネガティブフィードバックシステムが D 安定となるための制御器のゲイン K の範囲を求める問題を考える。ただし，以下の仮定をおく。

仮定 5 $C_1(s)$ の次数に $P_1(s)$ の次数を加えたものが，$C_0(s)$ の次数に l を加えたもの以下であるとする。また，$C_0(s)$, $C_1(s)$, $P_1(s)$ の最高次係数は正で，$\hat{\alpha}_l > r_l$ とする。

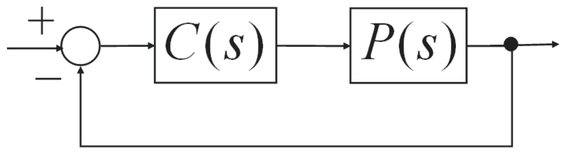

図 4.2: A negative feedback system

ここで，

$$\begin{aligned}\hat{p}(s) &= C_0(s)(\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 s + \cdots + \hat{\alpha}_l s^{l-1}) \quad (4.18)\\ p_i(s) &= s^{i-1}C_0(s),\ i = 1, \cdots, l \quad (4.19)\\ p_K(s) &= C_1(s)P_1(s) \quad (4.20)\end{aligned}$$

とおけば，このシステムの特性多項式族は (4.15) 式の形となる。また，仮定 5 より，仮定 4 が満たされる。

さて，(4.15) 式に属する多項式が D 安定となるような K の範囲を求める方法について考えよう。多項式の平行ポリトープの D 安定性は，エッジ定理 [1] によりそのエッジに相当する多項式の D 安定性に帰着されるが，頂点多項式の D 安定性には一般には帰着されない。よって，(4.15) 式のエッジに相当する多項式がすべて安定となるような K の範囲を求めればよい。

これを求めるために，まずは係数空間における方向が $p_K(s)$ である 2^l 個の直線多項式

$$\hat{p}(s) + \sum_{i=1}^{l} r_{i\pm} p_i(s) + K p_K(s),\ r_{i\pm} \in \{-r_i, r_i\},\ K \in \Re \quad (4.21)$$

がすべて D 安定となるような K の範囲を求め，それを

$$(K_{-1}^1, K_{+1}^1) \cup (K_{-1}^2, K_{+1}^2) \cup \cdots \cup (K_{-1}^b, K_{+1}^b) \quad (4.22)$$

としよう。これは，仮定 4 より $\hat{p}(s) + \sum_{i=1}^{l} r_{i\pm} p_i(s)$ の次数が $p_K(s)$ の次数以上で，最高次係数が共に正なので Stability Feeler を用いて求めることができる。これを図 4.3 に示す。ここで，破線で表現されているものが (4.21) 式である。もし，方向多項式 $p_i(s), i = 1, \cdots, l$ がすべて凸方向であれば，方向が $p_i(s)$ のエッジ多項式の安定性は端点多項式の安定性に帰着されるので，$\mathcal{P}_p(s)$ において K の範囲が (4.22) 式で表されるときすべてのエッジ多項式が安定となる。ちなみに凸方向とは，大略を述べると，多項式係数空間でのセグメント多項式の D 安定性がその両端点のそれで定まる性質をいう [2, 23]。よって $\mathcal{P}_p(s)$ が安定となるための K の範囲は (4.22) 式で表される。

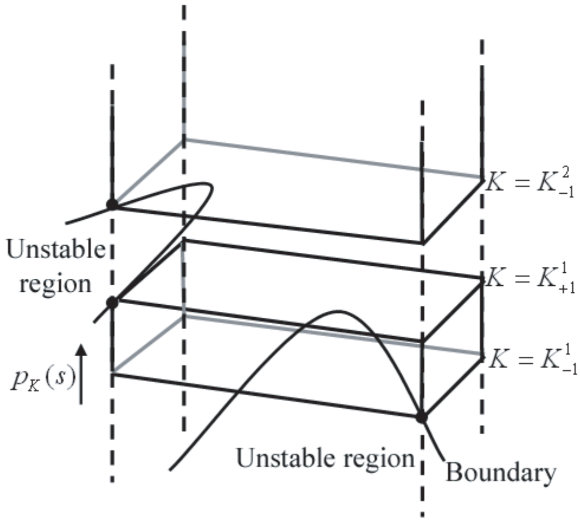

図 4.3: The range (4.22)

しかしながら，方向多項式 $p_i(s), i = 0, \cdots, l$ すべてが凸方向であるとは限らない場合は，方向が $p_i(s)$ のエッジ多項式が不安定となる可能性がある。その場合，K の範囲は (4.22) 式より狭くなり，これを計算しなければならない。そのための逐次的な方法を以下に示す。$\mathcal{P}_p(s)$ において K の範囲が (4.22) 式で表されるとき，方向が $p_e(s), e \in \{1, \cdots, l\}$ のエッジ多項式は

$$\begin{aligned}&\hat{p}(s) + \sum_{i=1}^{e-1} r_{i\pm} p_i(s) + \sum_{i=e+1}^{l} r_{i\pm} p_i(s) + (K_c^d - c\Delta) p_K(s) + \alpha_e p_e(s),\\&r_{i\pm} \in \{-r_i, r_i\},\ c \in \{-1, +1\},\ d \in \{1, \cdots, b\}, \alpha_e \in [-r_e, r_e]\end{aligned} \tag{4.23}$$

と表される。ただし，Δ は十分小さい正の実数である。この多項式は図 4.4 の破線で示される。この多項式の安定な α_e の範囲を Stability Feeler により調べる。不安定な範囲が存在する場合は，その範囲内に含まれる一つの多項式を通り，方向が $p_K(s)$ のセグメント多項式

$$\begin{aligned}&\hat{p}(s) + \sum_{i=1}^{e-1} r_{i\pm} p_i(s) + \sum_{i=e+1}^{l} r_{i\pm} p_i(s) + \tilde{r}_e p_e(s) + K p_K(s),\\&K \in (K_{-1}^d, K_{+1}^d)\end{aligned} \tag{4.24}$$

の安定な K の範囲を Stability Feeler で求める。ここで，$\tilde{r}_e$ は (4.23) 式が不安定となる α_e の値の一つである。(4.24) 式は図 4.5 の点線で示される。(4.24) 式は不安定な多項式を含むので，この安定な範囲は (K_{-1}^d, K_{+1}^d) よりも狭いものとなる。求め

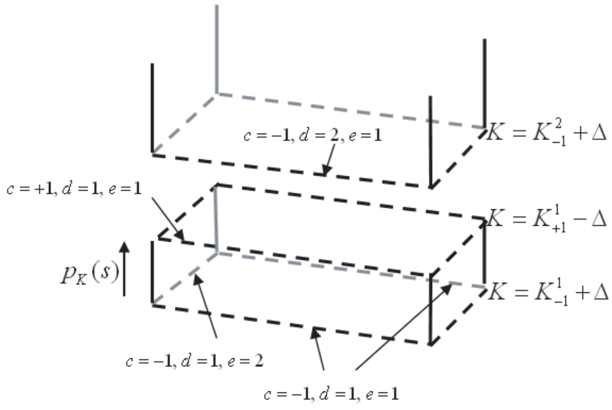

図 4.4: The edge polynomials (4.23)

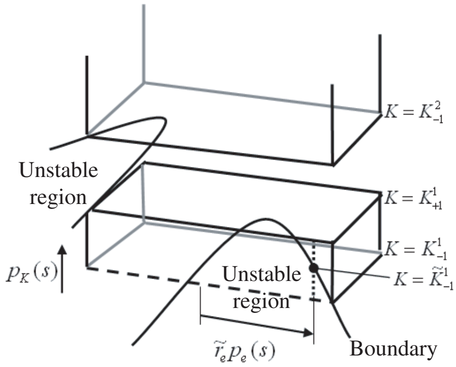

図 4.5: The segment polynomial (4.24)

た範囲を (4.22) 式の (K^d_{-1}, K^d_{+1}) とおきかえる。例えば，図 4.5 の場合，(4.22) 式の (K^1_{-1}, K^1_{+1}) を $(\tilde{K}^1_{-1}, K^1_{+1})$ とする。上記のことを $p_e(s)$, $e \in \{1, \cdots, l\}$ 方向のエッジ多項式がすべて安定となるまで繰り返し，K の範囲をこのようにして求められたものとすれば，$\mathcal{P}_p(s)$ に属するすべてのエッジ多項式が安定となるため，エッジ定理より $\mathcal{P}_p(s)$ は安定となる。すなわち $\mathcal{P}_p(s)$ が安定であるための K の範囲が求められる。以上の考えに従えば，K の範囲を求めるためのアルゴリズムは以下のようになる。

Step 1: 2^l 個の係数空間上の直線

$$\hat{p}(s) + \sum_{i=1}^{l} r_{i\pm} p_i(s) + K p_K(s),\ r_{i\pm} \in \{-r_i, r_i\},\ K \in \Re \tag{4.25}$$

がすべて安定となるような K の範囲を Stability Feeler を用いて求め，それを

$$(K_{-1}^1, K_{+1}^1) \cup (K_{-1}^2, K_{+1}^2) \cup \cdots \cup (K_{-1}^b, K_{+1}^b) \tag{4.26}$$

とおく。ここで，$K_{-1}^1 = -\infty$ のときは，$-M$ を K_{-1}^1 に代入する。ただし，M は十分大きい正の実数である。また，$K_{+1}^b = +\infty$ のときは M を K_{+1}^b に代入する。

Step 2: $c \leftarrow -1$, $d \leftarrow 1$, $e \leftarrow 1$, $h \leftarrow 1$ とおく。また，$I = \{1, 2, \cdots, b\}$ とおく。

Step 3: $p_e(s)$ が凸方向ならば $h \leftarrow 2^{l-1}$ として Step 6 へ。

Step 4: 十分小さい正の実数を Δ とおき，セグメント多項式

$$\hat{p}(s) + \sum_{i=1}^{l} q_{hi}^e r_i p_i(s) + (K_c^d - c\Delta) p_K(s) + \alpha_e p_e(s),\ \alpha_e \in [-r_e, r_e] \tag{4.27}$$

が不安定となるような α_e の範囲を Stability Feeler を用いて調べ，その範囲内に含まれる一つの値を $\tilde{r}_e$ とおく。ここで，q_{ij}^e は以下のような，e 列目の要素がすべて 0 で，その他は +1 または −1 の行列の要素である。

$$\{q_{ij}^e\} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & -1 & \cdots & -1 \\ +1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & +1 & \cdots & -1 & 0 & -1 & \cdots & -1 \\ +1 & +1 & \cdots & -1 & 0 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ +1 & +1 & \cdots & +1 & 0 & +1 & \cdots & +1 \end{bmatrix} \in \Re^{2^{l-1} \times l} \tag{4.28}$$

セグメント多項式 (4.27) 式が安定ならば，Step 6 へ。

Step 5: セグメント多項式

$$\hat{p}(s) + \sum_{i=1}^{l} q_{hi}^e r_i p_i(s) + \tilde{r}_e p_e(s) + K p_K(s),\ K \in (K_{-1}^d, K_{+1}^d) \tag{4.29}$$

が安定であるような区間を Stability Feeler を用いて調べ，その区間が $(\tilde{K}_{-1}^d, \tilde{K}_{+1}^d) \cup (K_{-1}^{b+1}, K_{+1}^{b+1}) \cup \cdots \cup (K_{-1}^{b+\tilde{b}}, K_{+1}^{b+\tilde{b}})$ で表されるとき，集合 I に新たな要素 $b + 1, \cdots, b + \tilde{b}$ を加え，$K_{-1}^d \leftarrow \tilde{K}_{-1}^d$, $K_{+1}^d \leftarrow \tilde{K}_{+1}^d$, $b \leftarrow b + \tilde{b}$ として Step 4 に戻る。安定であるような区間が存在しない場合は，集合 I から d を取り除き，$h \leftarrow 2^{l-1}$, $e \leftarrow l$, $c \leftarrow +1$ として Step 6 へ。

Step 6: $h < 2^{l-1}$ のとき，$h \leftarrow h+1$ として Step 4 へ。

$h = 2^{l-1}$, $e < l$ のとき，$h \leftarrow 1$，$e \leftarrow e+1$ として Step 3 へ。

$h = 2^{l-1}$, $e = l$, $c = -1$ のとき，$h \leftarrow 1$，$e \leftarrow 1$, $c \leftarrow +1$ として Step 3 へ。

$h = 2^{l-1}$, $e = l$, $c = +1$, $d < b$ のとき，$h \leftarrow 1$，$e \leftarrow 1$, $c \leftarrow -1$, $d \leftarrow d+1$ として Step 3 へ。

$h = 2^{l-1}$, $e = l$, $c = +1$, $d = b$ のとき，(4.15) 式が安定となるような K の値の集合は，

$$[K_{-1}^{i_1}+\Delta, K_{+1}^{i_1}-\Delta] \cup [K_{-1}^{i_2}+\Delta, K_{+1}^{i_2}-\Delta] \cup \cdots \cup [K_{-1}^{i_{b'}}+\Delta, K_{+1}^{i_{b'}}-\Delta], \\ i_1, \cdots, i_{b'} \in I \tag{4.30}$$

となる（終了）。

注釈 2　このアルゴリズムによって求まる K の範囲は，ほとんどの場合 $\mathcal{P}_p(s)$ が D 安定であるための最大の範囲となるが，そのようにならない場合もある。それは以下の二つであるが，これらは各場合で触れているように，大きなデメリットにはならないと思われる。

- 真の範囲が無限区間あるいは半無限区間の場合
  例えば，安定であるための K の真の範囲が $(K^1, +\infty]$ である場合，このアルゴリズムでは $[K^1+\Delta, M-\Delta]$ という解になる。また，真の範囲が $[-\infty, +\infty]$ の場合，このアルゴリズムでの解は $[-M+\Delta, M-\Delta]$ となる。しかしながら，M, Δ はそれぞれ十分大きい正実数，十分小さい正実数とすることができるので，実際に制御系を設計する際に支障はないと思われる。

- $\hat{p}(s)$ と $p_K(s)$ の次数が等しい場合
  この場合，多項式族 $\mathcal{P}_p(s)$ は，次数が $\hat{p}(s)$ より低い多項式や最高次係数が負となる多項式を含むが，このアルゴリズムを用いると，Stability Feeler の定義より次数が $\hat{p}(s)$ と等しく，最高次係数が正であるような範囲しか求めることができない。しかしながら，その範囲内に限れば，安定であるための最大の範囲が導かれる。また，$\mathcal{P}_p(s)$ の定義式を適当に変形すれば，このアルゴリズムを用いて $\mathcal{P}_p(s)$ の最高次係数が負となる範囲の中での安定な範囲を調べることも不可能ではない。

以上の場合を除けば，このアルゴリズムによって求まる K の範囲は，$\mathcal{P}_p(s)$ が D 安定であるための最大の範囲となる。なぜならば，Step 1 と Step 5 の操作により除外される範囲に属する任意の K で $\mathcal{P}_p(s)$ は不安定な多項式を含む，すなわち，このアルゴリズムにより除外される範囲は安定な範囲が存在せず，かつ (4.30) 式の Δ を十分小さい正の数としているからである。

4.3 数値例

前節のアルゴリズムを用いた，安定な範囲を求める例を以下に示す。

例 3 制御器と不確かさを含むプラントの伝達関数がそれぞれ

$$C(s) = \frac{K}{1+3s} \tag{4.31}$$

$$P(s) = \frac{8.5+3.5s}{1+(8+\alpha_2)s+(6+\alpha_3)s^2}, \quad \alpha_2,\ \alpha_3 \in [-1,1] \tag{4.32}$$

で表される，ネガティブフィードバックシステムが Hurwitz 安定であるためのゲイン K の範囲を考える。このシステムの特性多項式は

$$\begin{aligned}&\hat{p}(s)+\alpha_2 p_2(s)+\alpha_3 p_3(s)+Kp_K(s),\\ &\hat{p}(s)=(1+3s)(1+8s+6s^2),\ p_2(s)=s+3s^2,\ p_3(s)=s^2+3s^3,\\ &p_K(s)=8.5+3.5s,\ \alpha_i\in[-r_i,r_i],\ r_2=r_3=1\end{aligned} \tag{4.33}$$

となる。4 つの直線多項式

$$\hat{p}(s)+r_2p_2(s)+r_3p_3(s)+Kp_K(s), K\in\Re \tag{4.34}$$

$$\hat{p}(s)+r_2p_2(s)-r_3p_3(s)+Kp_K(s), K\in\Re \tag{4.35}$$

$$\hat{p}(s)-r_2p_2(s)+r_3p_3(s)+Kp_K(s), K\in\Re \tag{4.36}$$

$$\hat{p}(s)-r_2p_2(s)-r_3p_3(s)+Kp_K(s), K\in\Re \tag{4.37}$$

が Hurwitz 安定であるための K の範囲を Stability Feeler により求めると，それぞれ $(-0.12, 6.50)$, $(-0.12, 23.81)$, $(-0.12, 3.22)$, $(-0.12, 6.71)$ となった。よって Step 1 で求められる K の範囲は $(K^1_{-1}, K^1_{+1}) = (-0.12, 3.22)$ となる。さらに，8 つのセグメント多項式

$$\hat{p}(s)-p_3(s)+(K^1_{-1}+\Delta)p_K(s)+\alpha_2p_2(s),\ \alpha_2\in[-1,1] \tag{4.38}$$

$$\hat{p}(s)+p_3(s)+(K^1_{-1}+\Delta)p_K(s)+\alpha_2p_2(s),\ \alpha_2\in[-1,1] \tag{4.39}$$

$$\hat{p}(s)-p_2(s)+(K^1_{-1}+\Delta)p_K(s)+\alpha_3p_3(s),\ \alpha_3\in[-1,1] \tag{4.40}$$

$$\hat{p}(s)+p_2(s)+(K^1_{-1}+\Delta)p_K(s)+\alpha_3p_3(s),\ \alpha_3\in[-1,1] \tag{4.41}$$

$$\hat{p}(s)-p_3(s)+(K^1_{+1}-\Delta)p_K(s)+\alpha_2p_2(s),\ \alpha_2\in[-1,1] \tag{4.42}$$

$$\hat{p}(s)+p_3(s)+(K^1_{+1}-\Delta)p_K(s)+\alpha_2p_2(s),\ \alpha_2\in[-1,1] \tag{4.43}$$

$$\hat{p}(s)-p_2(s)+(K^1_{+1}-\Delta)p_K(s)+\alpha_3p_3(s),\ \alpha_3\in[-1,1] \tag{4.44}$$

$$\hat{p}(s)+p_2(s)+(K^1_{+1}-\Delta)p_K(s)+\alpha_3p_3(s),\ \alpha_3\in[-1,1] \tag{4.45}$$

の Hurwitz 安定性を Stability Feeler で調べた結果，すべて安定となった。すなわち，Step 4 で安定性を調べた多項式はすべて安定となり，Step 5 には移らなかった。ただし，$\Delta = 0.01$ とした。以上より，このシステムが Hurwitz 安定となるためのゲイン K の範囲は

$$[-0.11, 3.21] \tag{4.46}$$

と結論される。

例 4 制御器と不確かさを含むプラントの伝達関数がそれぞれ

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{K(-2.00376 - 2.00251s + 1.00125s^2)}{(1-10^8) + 1.999s + 0.999s^2} \quad (4.47)\\ P(s) &= \frac{2+s}{-3.50752 + \alpha_1 + 2.00326s},\ \alpha_1 \in [-0.5, 0.5] \quad (4.48) \end{aligned}$$

で表される，ネガティブフィードバックシステムが Hurwitz 安定であるためのゲイン K の範囲を考える。このシステムの特性多項式は

$$\begin{aligned} &\hat{p}(s) + \alpha_1 p_1(s) + K p_K(s),\\ &\hat{p}(s) = ((1-10^8) + 1.999s + 0.999s^2)\cdot(-3.50752 + 2.00326s),\\ &p_1(s) = (1-10^8) + 1.999s + 0.999s^2,\\ &p_K(s) = (-2.00376 - 2.00251s + 1.00125s^2)\cdot(2+s),\\ &\alpha_1 \in [-r_1, r_1],\ r_1 = 0.5 \end{aligned} \tag{4.49}$$

となる。2 つの直線多項式

$$\hat{p}(s) + r_1 p_1(s) + K p_K(s),\ K \in \Re \tag{4.50}$$

$$\hat{p}(s) - r_1 p_1(s) + K p_K(s),\ K \in \Re \tag{4.51}$$

が Hurwitz 安定であるための K の範囲を Stability Feeler により求めると，それぞれ $(-1.99876, -0.75047)$, $(-1.99876, -1.99722) \cup (-1 - 2.5\times 10^{-7}, -1 + 1.0\times 10^{-8})$ となった。よって Step 1 で求められる K の範囲は $(K^1_{-1}, K^1_{+1}) \cup (K^2_{-1}, K^2_{+1}) = (-1.99876, -1.99722) \cup (-1 - 2.5\times 10^{-7}, -1 + 1.0\times 10^{-8})$ となる。さらに，4 つのセグメント多項式

$$\hat{p}(s) + (K^1_{-1} + \Delta)p_K(s) + \alpha_1 p_1(s),\ \alpha_1 \in [-0.5, 0.5] \tag{4.52}$$

$$\hat{p}(s) + (K^1_{+1} - \Delta)p_K(s) + \alpha_1 p_1(s),\ \alpha_1 \in [-0.5, 0.5] \tag{4.53}$$

$$\hat{p}(s) + (K^2_{-1} + \Delta)p_K(s) + \alpha_1 p_1(s),\ \alpha_1 \in [-0.5, 0.5] \tag{4.54}$$

$$\hat{p}(s) + (K^2_{+1} - \Delta)p_K(s) + \alpha_1 p_1(s),\ \alpha_1 \in [-0.5, 0.5] \tag{4.55}$$

（ただし，$\Delta = 1\times10^{-8}$）の Hurwitz 安定性を Stability Feeler で調べた結果，(4.52), (4.53) 式は安定となったが，(4.54) 式は $\alpha_1 \in [-0.5 + 4 \times 10^{-8}, -7.66 \times 10^{-4}]$ の範囲が不安定となった。よって Step 5 に移り，K の範囲を狭くする必要がある。$\tilde{r}_1 = -0.25$ とおき，セグメント多項式

$$\hat{p}(s) + \tilde{r}_1 p_1(s) + Kp_K(s), K \in (K^2_{-1}, K^2_{+1}) \tag{4.56}$$

の安定な範囲を Stability Feeler で調べた結果，安定な範囲は存在しなかった。よってこのシステムは $K \in (K^2_{-1}, K^2_{+1})$ の範囲では不安定となることが判明する。以上より，このシステムが Hurwitz 安定となるためのゲイン K の範囲は

$$[-1.99876 + \Delta, -1.99722 - \Delta] \tag{4.57}$$

と結論される。

従来の方法では，K が有限区間で与えられているときに，その安定性を判定することのみが可能であったのに対し，本方法は上の二つの例題で示されているように，安定であるための K の範囲を求めることができる。また，例 4 で示されているように，端点結果が成立しない場合（(4.54) 式）でも問題なく K の範囲を求めることができる。よって，不確かさを含むシステムの設計が可能となる。

また，Stability Feeler によりセグメント多項式の D 安定性が判定可能なので，K が与えられた場合の D 安定性の判定ももちろん可能である。

4.4　まとめ

本章では，Stability Feeler という新しい安定解析ツールを提案し，多項式の平行ポリトープが D 安定であるための変動範囲を求めることができることを示した。また，このツールが不確かさを含むシステムの設計に応用できることを示した。

Stability Feeler の計算は，4.1 節で述べたように，$\partial\mathcal{D}_c$ が一つのパラメータで表現できないという特殊な状況を除けば，一変数の方程式を解く問題に帰着され，特に D 安定性として Hurwitz 安定性，Schur 安定性などを考える場合は代数方程式を解く問題に帰着されるので困難ではない。

また，4.2 節のアルゴリズムを用いれば，ほとんど Stability Feeler の計算のみで多項式の平行ポリトープが D 安定となるための範囲を求めることができ，しかも求められる範囲は注釈 2 で述べたように，ほとんどの場合最大のものとなる。

第5章　Stability Feelerによるルーリエ系のロバスト安定解析評価

本章では，Stability Feeler によるルーリエ系のロバスト安定解析評価について述べる。2 章で述べたように，近年の研究では線形システムのロバスト安定性のみならず，非線形システムのひとつであるルーリエ系のロバスト安定性を判別することも要求されている。ルーリエ系のロバスト安定解析に関する先行研究として，文献 [10, 17, 26] などがある。これらの文献では，線形部伝達関数の各係数に区間型の不確かさを含む連続時間ルーリエ系が絶対安定であるための十分条件を導いている。

しかしながら，4 章で提案した Stability Feeler を利用すれば，上の文献 [10, 17, 26] で取り扱っている区間型の不確かさを含む，より一般的なアフィン線形な不確かさを含むルーリエ系を安定解析することが可能である。また，本方法を用いれば，アイザマンの推測が成立するとき絶対安定となるセクタゲインの上限を求めることができる。一方，この推測が成立しない場合は絶対安定となるセクタゲインの上界しか得られず，すなわち絶対安定となるための必要条件しか得られない。しかしながら，この場合も，適当なロバスト安定解析法で安定であるための十分条件が得られるならば，この条件の鋭さがどの程度であるかを評価することができる。すなわち，Stability Feeler は不確かさを含む線形近似システムが安定であるための必要条件を提供することにより，現在のあるいは向後のルーリエ系のロバスト安定性の十分条件の評価を可能にする。

5.1　ルーリエ系の定義とアイザマンの推測

ルーリエ系は，図 5.1 のような非線形システムである。ここで，

$$G(s) = \frac{q_1(s)}{q_0(s)} \tag{5.1}$$

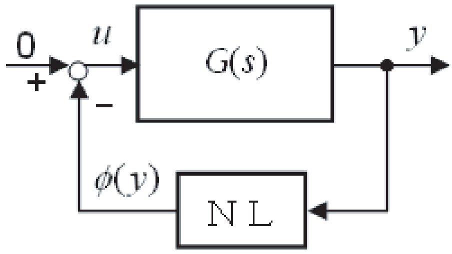

図 5.1: A Lur'e system

はプロパーな線形部伝達関数，NL はその出力が $\phi(y)$ で表される静的な非線形要素である。以下のセクタ条件と呼ばれる式

$$0 \leq \frac{\phi(y)}{y} \leq k, \quad \phi(0) = 0 \tag{5.2}$$

を満たす任意の非線形関数 $\phi(y)$ に対してルーリエ系が大域的に安定であるとき，系はセクタ $[0, k]$ で絶対安定であるという。

　また，アイザマンの推測とはルーリエ系の絶対安定性を調べる際に重要となる推測で,「非線形要素をゲイン K をもつ線形要素でおきかえるとき，すべての $K \in [0, k_L]$ に対して安定であれば，ルーリエ系はセクタ $[0, k_L]$ について絶対安定である」という命題である。この推測は一般的には成立しないが，この推測が成り立つ場合では，非線形要素を K でおきかえ，線形システムとみなして解析することができる。また，この推測が成り立たない場合でも，非線形要素を K でおきかえた線形システムがすべての $K \in [0, k_L]$ に対して安定であれば,「ルーリエ系が絶対安定となるセクタゲインの上界は k_L である」という結論が得られる。連続時間ルーリエ系の場合，アイザマンの推測が成り立つ例として，非線形特性 $\phi(y)$ が y の増加とともに y 軸に漸近することなく，線形部が Hurwitz 安定で，その伝達関数 $G(s)$ が

$$\frac{1}{s + a_0}, \ \frac{s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}, \ \frac{1}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \tag{5.3}$$

で表される場合が挙げられる [27]。その他，アイザマンの推測が成立する例については，文献 [25] を参照されたい。また，離散時間ルーリエ系の場合については，文献 [6] がある。

5.2 ルーリエ系のロバスト絶対安定解析

ルーリエ系の安定解析は，非線形部に不確かさを許すという意味でロバスト安定解析であるが，本節では文献 [10, 17, 26] などと同じく線形部分にも不確かさを考える。具体的には，5.2.1 節において (5.1) 式の $q_0(s)$ または $q_1(s)$ が区間多項式であるような連続時間ルーリエ系について検討する。5.2.2 節においては $q_0(s)$ または $q_1(s)$ に区間型よりも一般的なアフィン線形な不確かさをもつ場合について検討する。また，この節の議論では連続時間ルーリエ系のみならず，離散時間ルーリエ系を含む，線形部伝達関数が任意の演算子で表されているようなルーリエ系の絶対安定性を調べることができる。

5.2.1 区間多項式の場合

線形部伝達関数の n 次分母多項式 $q_0(s)$ が最高次係数が常に正の区間多項式で，分子多項式 $q_1(s)$ が一定の多項式であるような連続時間ルーリエ系を考える。すなわち，$q_0(s)$ が以下で定義される多項式族 $\mathcal{P}_I$ に属するとする。

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_I \;&:=\; \Big\{q_0(s) : q_0(s) = \sum_{i=0}^{n} a_i s^i,\ a_i \in [a_i^-, a_i^+],\\ &\qquad a_i^- \le a_i^+,\ i = 0, \cdots, n,\quad a_n^- > 0\Big\}\end{aligned} \tag{5.4}$$

また，$\mathcal{P}_I$ に属する任意の $q_0(s)$ は Hurwitz 安定であるとする。このようなルーリエ系が絶対安定となるようなセクタゲインの上限 k を求めることを考える。

ここで，非線形要素をゲイン K をもつ線形要素におきかえ，この線形システムにおいて K を 0 から増大させたとき Hurwitz 安定性が保たれる K の上限を k_L とすると，

$$k \leqq k_L \tag{5.5}$$

となる。ただし，等号はアイザマンの推測が成立するときに限り成り立つ。このことより，例えば，線形部伝達関数が (5.3) 式のような形で表される場合，ルーリエ系が絶対安定となるような非線形部は，セクタ $[0, k_L]$ を満たし，かつ $\phi(y)$ が y の増加とともに y 軸に漸近することのないようなものとなる。

以下では，k_L を求める方法について述べる。非線形要素をゲイン K をもつ線形要素におきかえた線形システムの特性多項式族は，

$$\mathcal{P}_{IL} := \{q_0(s) + K q_1(s) : q_0(s) \in \mathcal{P}_I,\ K \ge 0\} \tag{5.6}$$

となる。$q_0(s)$ は Hurwitz 安定なので，$K=0$ のときこのシステムは Hurwitz 安定である。ここで，カリトノフの定理 [18] より，K の値を固定したとき，(5.6) 式が Hurwitz 安定であるための必要十分条件は，以下の 4 つのカリトノフ多項式

$$a_0^+ + a_1^+ s + a_2^- s^2 + a_3^- s^3 + a_4^+ s^4 + \cdots + Kq_1(s) \tag{5.7}$$
$$a_0^+ + a_1^- s + a_2^- s^2 + a_3^+ s^3 + a_4^+ s^4 + \cdots + Kq_1(s) \tag{5.8}$$
$$a_0^- + a_1^- s + a_2^+ s^2 + a_3^+ s^3 + a_4^- s^4 + \cdots + Kq_1(s) \tag{5.9}$$
$$a_0^- + a_1^+ s + a_2^+ s^2 + a_3^- s^3 + a_4^- s^4 + \cdots + Kq_1(s) \tag{5.10}$$

がすべて Hurwitz 安定となることである。したがって，(5.7)〜(5.10) 式において K を 0 から増大させたとき，安定性が保たれる K の上限をそれぞれ k_1, k_2, k_3, k_4 とすると，(5.6) 式の安定性が保たれる K の上限 k_L は

$$k_L = \min_{i=1,\cdots,4} k_i \tag{5.11}$$

となる。k_1〜k_4 は，Stability Feeler によって容易に求めることができる。

以上より，アイザマンの推測が成り立つ場合，4 つの直線多項式に対して Stability Feeler の計算を行うことにより，ルーリエ系が絶対安定となるセクタゲインの上限 k が求められる。一方，アイザマンの推測が成り立たない場合，k は上記で求めた k_L の値よりも小さくなってしまう。この差異については，5.3 節で詳しく述べる。以上の議論のいくつかの例を以下に示す。

例 5 （アイザマンの推測が成立する場合の例）　線形部伝達関数が以下のように表されているとする。

$$G(s) = \frac{1}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + s^3} \tag{5.12}$$

ここで，$a_0 \in [0.9,\ 1.1]$, $a_1 \in [2.9,\ 3.1]$, $a_2 \in [2.9,\ 3.1]$ である。このとき，$G(s)$ は Hurwitz 安定である。非線形要素をゲイン K をもつ線形要素でおきかえたとき，特性多項式は

$$a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + s^3 + K \tag{5.13}$$

となる。K を固定したとき，カリトノフ多項式は

$$1.1 + 3.1s + 2.9s^2 + s^3 + K \tag{5.14}$$
$$1.1 + 2.9s + 2.9s^2 + s^3 + K \tag{5.15}$$
$$0.9 + 2.9s + 3.1s^2 + s^3 + K \tag{5.16}$$
$$0.9 + 3.1s + 3.1s^2 + s^3 + K \tag{5.17}$$

となる。K を0から増大させたとき，これらの多項式のHurwitz安定性が保たれる K の上限をStability Feelerを用いて求めると，それぞれ $7.88\cdots$，$7.30\cdots$，$8.09\cdots$，$8.71\cdots$ となる。よって，(5.13) 式の Hurwitz 安定性が保たれる K の上限 k_L は，$7.30\cdots$ となる。ここで，(5.12) 式は (5.3) 式の形で表されるもののひとつなので，非線形部がセクタ $[0,\ 7.30\cdots]$ を満たし，かつ $\phi(y)$ が y の増加とともに y 軸に漸近することのないようなルーリエ系は絶対安定であり，セクタゲインが $7.30\cdots$ を超えると絶対安定でなくなることになる。つまり，この値はこの場合の正確なゲインの限界値である。

例 6 （アイザマンの推測の成否が不明である場合の例）　線形部伝達関数が以下のように表されているとする。

$$G(s) = \frac{1 + 0.01s}{1 + a_1 s + 41s^2 + a_3 s^3 + 5s^4 + s^5} \tag{5.18}$$

ここで，$a_1 \in [8,\ 11]$，$a_3 \in [10,\ 12]$ とする。例5と同様にStability Feelerを用いて k_L を求めると，$k_L = 26.38\cdots$ となる。ここで，この場合，アイザマンの推測の成否は不明であるため，ルーリエ系が絶対安定となるセクタゲインの上限 k は $26.38\cdots$ 以下となる。

ここまで，線形部伝達関数の分母多項式 $q_0(s)$ にのみ不確かさが含まれ，分子多項式 $q_1(s)$ が一定である場合を述べてきた。しかしながら，逆に $q_1(s)$ に不確かさが含まれ，$q_0(s)$ が一定である場合でも，$q_1(s)$ と $q_0(s)$ の次数が同じでかつ最高次係数が両者とも正ならば，非線形要素をゲイン K をもつ線形要素におきかえ，$K' = \frac{1}{K}$ とすると，その特性多項式族は

$$\{q_1(s) + K' q_0(s) : K' \in \Re\} \tag{5.19}$$

と表されるので，同様の議論が展開できる。

5.2.2 アフィン線形な不確かさを含む多項式の場合

前節では $q_0(s)$ が区間多項式である場合について述べたが，本節では $q_0(s)$ がより一般的な，最高次係数が常に正のアフィン線形な不確かさを含む多項式である場合を考える。すなわち，$q_0(s)$ が以下で定義される多項式族 $\mathcal{P}_A$ に属するとする。

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_A \ := \ & \Big\{ q_0(s) : q_0(s) = \hat{p}(s) + \sum_{i=0}^{l} \alpha_i p_i(s), \\ & \quad \alpha_i \in [-r_i, r_i],\ i = 0, \cdots, l \Big\} \end{aligned} \tag{5.20}$$

また，安定性の種類についても，より一般的な D 安定性を考える。こうすることにより，前節が連続時間ルーリエ系のみを対象としていたのに対し，線形部が z 演算子やデルタ演算子で表現されているような，離散時間ルーリエ系も対象にすることができる。ここで，$\mathcal{P}_A$ に属する任意の $p(s)$ は D 安定であるとする。

前節と同様に，非線形要素をゲイン K をもつ線形要素におきかえ，この線形システムにおいて K を 0 から増大させたとき D 安定性が保たれる K の上限 k_L を求める。この線形システムの特性多項式族は

$$\mathcal{P}_{AL} := \{q_0(s) + Kq_1(s) : q_0(s) \in \mathcal{P}_A,\ K \geq 0\} \tag{5.21}$$

となる。$q_0(s)$ は D 安定なので，$K = 0$ のときこのシステムは D 安定である。

$p_i(s),\ i = 0, \cdots, l$ がすべて凸方向 [2] である場合は，そうでない場合に比べ，より容易に k_L を求めることができる。この場合，k_L は，K を 0 から増大させたとき，以下の 2^{l+1} 個の係数空間上の直線多項式

$$\hat{p}(s) + \sum_{i=0}^{l} r_{i\pm} p_i(s) + Kq_1(s),\ r_{i\pm} \in \{-r_i, r_i\},\ K \geq 0 \tag{5.22}$$

すべての D 安定性が保たれるような K の上限 k'_L に等しい。なぜならば，上の 2^{l+1} 個の直線多項式が $K \in [0, k'_L]$ で D 安定であることと，$p_i(s),\ i = 0, \cdots, l$ がすべて凸方向であることから，K の範囲を $K \in [0, k'_L]$ としたとき (5.21) 式で表される多項式族のエッジ多項式がすべて D 安定で，さらにエッジ定理 [1] より (5.21) 式が D 安定となり，かつ K の範囲の上限が k'_L を超えると (5.22) 式のうち不安定となるものが存在するため，(5.21) 式においても不安定となるものが存在するからである。k'_L は，(5.22) 式で表されるすべての直線多項式に対して Stability Feeler の計算を行うことにより，容易に求めることができる。

一方，$p_i(s),\ i = 0, \cdots, l$ すべてが凸方向であるとは限らない場合は，4.2 節の方法を適用することができるが，本節の場合は K を 0 から増大させていくときに (5.21) 式の安定性が保たれる K の上限のみを求めればよいので，以下のようなより簡単なアルゴリズムでよい。

Step 1: K を 0 から増大させたとき，(5.22) 式すべての D 安定性が保たれるような K の上限を Stability Feeler を用いて求め，それを K_{tmp} とする。ただし，$K_{tmp} = \infty$ のときは，十分大きい正の実数 M を K_{tmp} に代入する。

Step 2: $e \leftarrow 0,\ h \leftarrow 1$ とおく。

Step 3: $p_e(s)$ が凸方向ならば $h \leftarrow 2^l$ として Step 6 へ。

Step 4: 十分小さい正の実数を Δ とおき，セグメント多項式

$$\hat{p}(s) + \sum_{i=0}^{l} q_{hi}^{e} r_i p_i(s) + (K_{tmp} - \Delta) q_1(s) + \alpha_e p_e(s),\ \alpha_e \in [-r_e, r_e] \tag{5.23}$$

が不安定となるような α_e の範囲を Stability Feeler を用いて調べ，その範囲内に含まれる一つの値を $\tilde{r}_e$ とおく。ここで，q_{ij}^{e} は以下のような，e 列目の要素がすべて 0 で，その他は +1 または −1 の行列の要素である。

$$\{q_{ij}^{e}\} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & -1 & \cdots & -1 \\ +1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & +1 & \cdots & -1 & 0 & -1 & \cdots & -1 \\ +1 & +1 & \cdots & -1 & 0 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ +1 & +1 & \cdots & +1 & 0 & +1 & \cdots & +1 \end{bmatrix} \in \Re^{2^l \times (l+1)} \tag{5.24}$$

セグメント多項式 (5.23) 式が D 安定ならば，Step 6 へ。

Step 5: K を 0 から増大させたとき，セグメント多項式

$$\hat{p}(s) + \sum_{i=0}^{l} q_{hi}^{e} r_i p_i(s) + \tilde{r}_e p_e(s) + K q_1(s),\ K \in [0,\ K_{tmp}] \tag{5.25}$$

の D 安定性が保たれるような K の上限を Stability Feeler を用いて求め，それを改めて K_{tmp} として Step 4 に戻る。

Step 6: $h < 2^l$ のとき，$h \leftarrow h + 1$ として Step 4 へ。

$h = 2^l$, $e < l$ のとき，$h \leftarrow 1$，$e \leftarrow e + 1$ として Step 3 へ。

$h = 2^l$, $e = l$ のとき，(5.21) 式が D 安定となるような K の値の上限 k_L は，

$$k_L = K_{tmp} - \Delta \tag{5.26}$$

となる（終了）。

以上のアルゴリズムにより，k_L が Stability Feeler の簡単な計算のみで容易に求められる。前節で述べたように，もとのルーリエ系が絶対安定となるセクタゲインの上限 k は，アイザマンの推測が成り立つ場合は k_L と等しくなり，そうでない場合は k_L 未満となる。次に例を示す。

例 7 連続時間ルーリエ系の線形部伝達関数が以下のように表されているとする。

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \frac{q_1(s)}{\hat{p}(s)+\alpha_0 p_0(s)+\alpha_1 p_1(s)}, \\
q_1(s) &= -1.5+s,\ \hat{p}(s)=8.5+6.5s+s^2, \\
p_0(s) &= 1+s,\ p_1(s)=2+s,\ \alpha_0,\alpha_1\in[-0.5,0.5]
\end{aligned} \tag{5.27}
$$

このとき，$G(s)$ は Hurwitz 安定である。

上記のアルゴリズムによって k_L を求める。(5.22) 式に相当する直線多項式は，

$$7+5.5s+s^2+Kq_1(s) \tag{5.28}$$

$$9+6.5s+s^2+Kq_1(s) \tag{5.29}$$

$$10+7.5s+s^2+Kq_1(s) \tag{5.30}$$

$$8+6.5s+s^2+Kq_1(s) \tag{5.31}$$

となる。K を 0 から増大させたとき，これらすべての多項式の Hurwitz 安定性が保たれる K の上限を Stability Feeler を用いて求めると，$K_{tmp}=4.66\cdots$ となる。さらに，(5.23) 式に相当するセグメント多項式の Hurwitz 安定性を Stability Feeler を用いて調べた結果，すべての $e,\ h$ で Hurwitz 安定となった。ただし，$K_{tmp}-\Delta=4.66$ となるように Δ の値を設定した。以上より，$k_L=4.66$ という結果が得られた。

ここで，(5.27) 式は (5.3) 式の形で表されるもののひとつなので，このルーリエ系が絶対安定となるような非線形部は，セクタ $[0,\ 4.66]$ を満たし，かつ $\phi(y)$ が y の増加とともに y 軸に漸近することのないようなものとなる。

ここまで，線形部伝達関数の分母多項式 $q_0(s)$ にのみ不確かさが含まれ，分子多項式 $q_1(s)$ が一定である場合を述べてきたが，$q_1(s)$ に不確かさが含まれ，$q_0(s)$ が一定である場合でも，$q_1(s)$ と $q_0(s)$ の次数が同じでかつ最高次係数が両者とも正ならば，前節と同様に $K'=\frac{1}{K}$ とすれば安定解析が可能である。

ここで，文献 [10, 17, 26] で対象としているシステムの不確かさとの違いを具体的に述べておく。同文献はモニックな区間多項式のみを対象としているのに対し，本論文ではより一般的な，アフィン線形な不確かさを含む多項式を対象としている。ただし，これらの文献では $q_0(s)$ と $q_1(s)$ の両方に不確かさが含まれているのに対し，本論文ではいずれかの多項式は一定であると仮定している。

5.3 ロバスト安定条件の鋭さ評価

5.2 節で述べたように，アイザマンの推測が成り立たない場合，ルーリエ系が絶対安定となるセクタゲインの正確な上限 k と，本方法によって得られる線形化し

たシステムが安定となるゲインの上限 k_L は一致しなくなってしまい，本方法により得られる結果は必要条件のみとなる。そこで本節では，文献 [10, 26] の方法による結果と本方法による結果を比較することにより，k と k_L との間にどの程度の差があるかを調べることを考える。この差異は，ルーリエ系を線形化したときの近似の度合を調べるためのひとつの有効な指標であると同時に，本方法により得られる必要条件の鋭さの指標でもある。

そのため，文献 [10, 26] で得られた結果を要約しておく。これらの文献では，連続時間ルーリエ系の線形部伝達関数の分母多項式 $q_0(s)$ をモニックな区間多項式，分子多項式 $q_1(s)$ を区間多項式とする場合を取り扱っている。このような線形部およびルーリエ系はそれぞれ区間プラント，区間ルーリエ系と呼ばれている。同文献では，区間ルーリエ系に関して，ポポフ定理を用いた以下のような結果を導いている。

補題 5 区間プラントのカリトノフ集合と呼ばれる集合に属する 16 個すべての $G(s)$ に対し，ポポフ定理の条件

$$k_P^{-1} + \mathrm{Re}[(1 + j\omega\theta)G(j\omega)] > 0,\ \forall\omega \geq 0 \tag{5.32}$$

を満たす実数 θ が存在するならば，区間ルーリエ系はセクタ $[0, k_P]$ で絶対安定である。 ■

ただし，カリトノフ集合とは，分母子の各々4 つのカリトノフ多項式の組み合わせから成るたかだか 16 個のプラント集合である。ここで，上の補題により得られる k_P は，区間ルーリエ系が絶対安定となるためのセクタゲインの上限 k とは必ずしも一致せず，一般に $k_P \leq k$ となることに注意が必要である。これは，線形部の不確かさを考慮したための保守性に加え，ポポフ定理の条件そのものが十分条件であるという 2 つの要因から生じる。

ここで，連続時間ルーリエ系の線形部伝達関数の分母多項式 $q_0(s)$ または $q_1(s)$ にのみ不確かさが含まれていて，それがモニックな区間多項式で表される場合は k_L と k_P 両方が導出でき，両者の比較が可能である。明らかに，$k_P \leq k \leq k_L$ であるので，絶対安定であるためのセクタゲインの上限 k をある程度推定することができる。さらに，アイザマンの推測が成り立たないことにより生じる k_L と k の差は，Stability Feeler を用いて求められる k_L と補題 5 により求められる k_P の差以下であると評価される。また，十分条件の鋭さの指標である k と k_P の差も，同様に評価することができる。つまり，k, k_P, k_L 三者の鋭さ評価が可能となる。以下に例を示す。

例 8 アイザマンの推測の成否が不明である例 6 のルーリエ系について，k_L と k の差がどの程度であるか推測する。このルーリエ系にポポフ定理を適用して得られた結果は文献 [17] に示されており，$k_P = 4.826\cdots$ となる。

よって，アイザマンの推測が成り立たないことにより生じる k_L と k の差と，ポポフ定理の十分条件の鋭さの指標である k と k_P の差は，ともに $k_L = 26.38\cdots$ と $k_P = 4.826\cdots$ の差以下であることが結論できる。

このように，Stability Feeler は，線形部にも不確かさを含むルーリエ系の絶対安定条件の定量的な評価を与え得ることになる。

5.4　まとめ

本章では，線形部に不確かさが含まれるルーリエ系のロバスト絶対安定解析の鋭さの評価が Stability Feeler と呼ばれるツールで可能となることを示した。分母多項式 $q_0(s)$ か分子多項式 $q_1(s)$ のどちらかが一定の多項式である必要があるが，不確かさの種類については従来の区間多項式より一般的な，アフィン線形な不確かさを含む場合に対して本方法を適用することができる。また，5.2.2 節で述べたように，連続時間ルーリエ系のみならず，離散時間ルーリエ系にも適用可能である。必要となる計算は，Stability Feeler の容易な計算のみである。

また，この方法によれば，アイザマンの推測が成立する場合は絶対安定となるセクタゲインの上限を求めることができるが，そうでない場合は絶対安定となるセクタゲインの上界，すなわち絶対安定となるための必要条件のみが得られる。この場合，なんらかの絶対安定の十分条件が得られれば，アイザマンの推測が成立しないことにより必要条件の鋭さがどの程度失われるかの推測値を与えることができる。同時に，十分条件の鋭さの推測も可能であり，この意味で今後も報告されるであろうルーリエ系のロバスト安定解析法の一つの評価尺度を与えている。

第6章　結言

本論文では，セグメント安定性概念に基づいたシステムのロバスト安定解析・設計法について述べた。

本研究により，不確かさの形態としては一般的な多項式ポリトープシステムのデルタ演算子安定性の判定と Shifted-Hurwitz 安定性の判定が可能となった。これらの安定判別法を複数挙げたが，行列の固有値を用いる方法が十分速く安定判別可能で，かつ安定性条件は必要十分条件となっているため，最も適した方法であると結論できる。

また，これらの安定性以外の D 安定性については，方向付き安定半径あるいは本論文で提案した Stability Feeler を用いて多項式ポリトープの安定判別が可能である。さらに，Stability Feeler は与えられた多項式ポリトープの安定判別のみならず，多項式の平行ポリトープが安定であるための範囲を求めることも可能である。この性質により，不確かさを含む線形フィードバックシステムの設計に応用することができる。

最後に，Stability Feeler を用いたルーリエ系の絶対安定解析評価について述べた。線形部伝達関数の分母あるいは分子多項式に区間型の不確かさが含まれている場合のみならず，より一般的なアフィン線形な不確かさが含まれている場合も安定判別を行うことができる。特に，アイザマンの推測が成立している場合は絶対安定であるためのセクタゲインの上限，すなわち安定であるための必要十分条件が得られる。この推測が成立しない場合は安定であるための必要条件しか得られないが，他の十分条件との比較により絶対安定であるためのセクタゲインの上限をある程度推定することができる。さらに，本方法による必要条件と他の十分条件両者の鋭さ評価を行うことも可能である。

本研究の寄与は，多項式ポリトープに対して，Hurwitz，Schur，デルタ演算子安定などを含む最も一般的な D 安定性の判定法を与えたことである。多項式ポリトープは，係数に不確かさを含む場合の様々な状況を記述できる，一般性のある形式として知られている。得られた結果はすべて多項式係数空間のセグメントあるいはその延長である直線の安定性に関する議論としてまとめられている。

今後，このような研究に残された課題として，多項式係数空間でなく，行列空間の場合のセグメントの安定性や共通リアプノフ関数の存在性の判定が挙げられ

る。これは，行列ペンシルとも呼ばれ，この安定性について近年様々な研究がなされている（[7] など）。しかしながら，本論文で提案した Stability Feeler のようにセグメントが安定である範囲を求めるような研究はなされておらず，これができれば広範な応用が期待される。また，共通リアプノフ関数の存在性は切り替えシステムの安定性と関連が深く [4]，このシステムのロバスト安定性についても近年研究がされ始めている [5, 13]。これについても，共通リアプノフ関数の存在範囲を求める研究はされておらず，このことが可能になれば，安定な切り替えシステムのクラスが求められ，不確かさを含む切り替えシステムの設計への応用が期待できる。

また，本論文では Stability Feeler の応用例として，ロバストシステム設計やルーリエ系のロバスト絶対安定解析などを挙げたが，他にもルーリエ系についてアイザマンの推測が成立するクラスの探索や，非線形システムにおける安定平衡点近傍の安定領域の推定など，Stability Feeler の応用範囲は少なくないと思われる。これらについても，今後の課題として残されている。

謝辞

本研究を行うにあたってご指導いただいた森 武宏教授，黒江康明教授，高井重昌准教授，森 禎弘助教に感謝の意を表し，心から御礼申し上げます。また，いろいろと御協力いただいた川端啓史氏，知能制御研究室の皆様に感謝いたします。

参考文献

[1] A. C. Bartlett, C. V. Hollot and H. Lin：“Root locations of an entire polytope of polynomials: it suffices to check the edges”, *Math. Contr., Signals, and Syst.*, Vol. 1, pp.61–71 (1988)

[2] A. Rantzer：“Stability conditions for polytopes of polynomials”, *IEEE Trans. Auto. Contr.*, Vol. AC-37, No. 1, pp.79–89 (1992)

[3] B. R. Barmish: New Tools for Robustness of Linear Systems, Macmillan (1994)

[4] D. Liberzon and A. S. Morse: “Basic problems in stability and design of switched systems”, *IEEE Control Systems Magazine*, Vol. 19, Issue 5, pp. 59–70 (1999)

[5] E. Zeheb, O. Mason, S. Solmaz, and R. N. Shorten：“Some results on quadratic stability of switched systems with interval uncertainty”, *International Journal of Control*, Vol. 80, No. 6, pp. 825–831 (2007)

[6] Gil’ M. I. and Medina R. : “Aizerman’s Problem for Discrete Systems”, *Applicable Analysis*, Vol. 81, No. 6, pp. 1367-1375 (2002)

[7] H. Kokame, H. Ito and T. Mori: “Entire family of convex directions for real Hurwitz matrices”, *Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, vol. 4, pp. 3835-3836 (1994)

[8] J. E. Ackermann and B. R. Barmish：“Robust Schur stability of a polytope of polynomials”, *IEEE Trans. Auto. Contr.*, Vol. 33, No.10, pp.984–985 (1988)

[9] K. Kawabata, T. Mori and Y. Kuroe：“Directional stability radius: a stability analysis tool for uncertain polynomial systems”, *IEEE Trans. Auto. Contr.*, Vol. 48, No.6, pp.1012–1016 (2003)

[10] M. Dahleh, A. Tesi, and A. Vicino: "On the Robust Popov Criterion for Interval Lur'e System", *IEEE Trans. Automat. Contr.,* Vol. 38, No. 9, pp. 1400–1405, (1993)

[11] N. K. Bose：“Properties of the Q_n-matrix in bilinear transformation”, *Proceedings of the IEEE*, Vol. 71, No. 9, pp. 1110–1111 (1983)

[12] R. H. Middleton and G. C. Goodwin: Digital Control and Estimation: A Unified Approach, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1990)

[13] R. N. Shorten and K. S. Narendra：“On Common Quadratic Lyapunov Functions for Pairs of Stable LTI Systems Whose System Matrices Are Companion Form”, *IEEE Trans. Auto. Contr.*, Vol. 48, No. 4, pp. 618–621 (2003)

[14] S. P. Bhattacharyya, H. Chapellat and L. H. Keel: Robust Control: The Parametric Approach, Prentice Hall (1995)

[15] T. Matsuda, K. Kawabata and T. Mori: "Stability Analysis Methods for Delta-Operator Polytopic Polynomials" , *Electrical Engineering in Japan*, Vol. 159, No. 3, pp. 56 － 64 (2007)

[16] T. Mori and H. Kokame：“A note on the stability of delta-operator-induced systems”, *IEEE Trans. Auto. Contr.*, Vol. 45, No.10, pp.1885–1886 (2000)

[17] T. Mori, T. Nishimura, Y. Kuroe, and H. Kokame: "Comments on "On the Robust Popov Criterion for Interval Lur'e System"", *IEEE Trans. Automat. Contr.,* Vol. 40, No. 1, pp. 136–137 (1995)

[18] V. L. Kharitonov：“Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of differential equations”, *Differentsialnye Uravneniya*, Vol. 14, pp. 1483–1485 (1979)

[19] 金井 喜美雄・堀 憲之：「ディジタル制御システム入門」, 槙書店 (1992)

[20] 川端 啓史・森 武宏・黒江 康明：「方向付き安定半径を用いたデルタ演算子ダイヤモンド多項式の安定解析法」, 第 46 回システム制御情報学会研究発表講演会講演論文集, pp.55–56 (2002)

[21] 川端 啓史・森 武宏・黒江 康明：「デルタ演算子ダイヤモンド多項式における端点結果について」, システム制御情報学会論文誌, **15**, 7, pp.381–383 (2002)

[22] 計測自動制御学会偏：自動制御ハンドブック–基礎偏，オーム社，(1982)

[23] 小亀 英己・森 武宏：「パラメータ空間における多項式安定性理論の基礎 IV」, システム/制御/情報, **40**, 12, pp.531–533 (1996)

[24] 小亀 英己・森 武宏：「パラメータ空間における多項式安定性理論の基礎 V」, システム/制御/情報, **41**, 2, pp.73–81 (1997)

[25] 児玉 慎三・須田 信英・白川 洋充：「非線形制御系の安定判別における線形化法–I,II」, 制御工学, **14**, 11–12, pp. 694–707,751–762 (1970)

[26] 西村 剛・森 武宏・黒江 康明・小亀 英己：「区間プラントを含むルーリエ系に対するポポフの定理の適用について」, システム制御情報学会論文誌, **6**, 4, pp. 165–170, (1993)

[27] 平井 一正：「非線形制御」, コロナ社 (2003)

[28] 松田 忠典・川端 啓史・森 武宏：「デルタ演算子多項式ポリトープの安定判別法」, 電学論 C, **125**, 11, pp. 1666–1673, (2005)

[29] 松田 忠典・川端 啓史・森 武宏：「多項式ポリトープ解析のための Stability Feeler の提案」, 電学論 C, **126**, 11, pp. 1311–1317, (2006)

[30] 松田 忠典・森 武宏：「Stability Feeler によるルーリエ系のロバスト安定解析評価」, 電学論 C, 投稿中

[31] 森 武宏・小亀 英己：「パラメータ空間における多項式安定性理論の基礎 I」, システム/制御/情報, **40**, 6, pp.259–260 (1996)

[32] 若原 正樹・川端 啓史・森 武宏・黒江 康明：「方向付き安定半径の効率的計算法:ダイヤモンド多項式の場合」, 第 48 回システム制御情報学会研究発表講演会講演論文集, pp.109–110 (2004)

[33] 和田 光代：「ルーリエ系の絶対安定性とその周辺」, システム/制御/情報, **43**, 10, pp. 536–543 (1999)